

MK K-8°
87-B

18.1. sept.

1-5 feb

Смолуб N 801

КУРСЪ

МАТЕМАТИКИ

ТОМЪ II

ГЕОМЕТРІЯ.

ТЕОРЕТИЧЕСКАГО
И
ПРАКТИЧЕСКАГО
КУРСА
ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ
ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Содержащая въ себѣ

Полную, сокращенную и особливо прак-
тическую Геометрію.

въ пользу и употребленіе
ЮНОШЕСТВА

и упражняющихся въ математикѣ.

СОЧИНЕННАЯ

Артиллеріи Штыкъ-Юнкеромъ и партикулярнымъ
въ Москвѣ благороднаго юношества учите-
лемъ математики

Ефимомъ Войтяховскимъ.

Съ Указнаго дозволенія

ВЪ МОСКВѢ

Печатано въ вольной типографіи
у Хр. Клаудія, 1787 года.

Р. М. С. С. С. С.

РОСПИСАНІЕ МАТЕРІАМЪ.

Находящимся во второй части теоретическаго и практическаго курса чистой математики.

	страницы
О геометріи вообще.	I.
— Линіяхъ и углахъ.	3.
— Фигурахъ, о равенствѣ треугольниковъ, о свойствѣ перпендикулярныхъ и параллель- ныхъ линій и о углахъ разныхъ фигуръ	13.
— Линіяхъ проведенныхъ и о мѣрѣ угловъ въ кругѣ.	41.
— Пропорціональныхъ линіяхъ и подобствѣ треугольниковъ.	55.
— Планиметрїи или измѣренїи плоско- стей.	74.
— Пропорціональныхъ линіяхъ относящихся къ кругу.	III.
— Правильныхъ фигурахъ.	127.
— Подобныхъ Фигурахъ и о содержанїи плос- костей разныхъ геометрическихъ фи- гуръ.	158.
— Превращенїи плоскостей изъ одной фигуры въ другую.	185.
— Сложенїи плоскостей.	206.
— Вычитанїи плоскостей.	208.
— Увеличиванїи плоскостей.	208.
— Дѣленїи плоскостей.	213.
— Различныхъ положенїяхъ плоскостей	242.
— Тѣлахъ. геометрическихъ.	245.
— Начертанїи поверхностей тѣлъ и о оставленїи оныхъ изъ бумаги.	254.

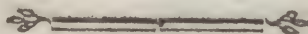
Из-

	страницы
О измѣреніи и сравненіи поверхностей тѣлъ. - - - - -	262.
— Содержаніи поверхностей тѣлъ. -	278.
— Измѣреніи толстоты тѣлъ. -	286.
— Измѣреніи толстоты пяти правильныхъ тѣлъ. - - - - -	332.
— Превращеніи тѣлъ изъ одной фигуры въ другую. - - - - -	341.
— Сложеніи тѣлъ. - - - - -	356.
— Вычитаніи тѣлъ. - - - - -	359.
— Увеличиваніи тѣлъ. - - - - -	361.
— Дѣленіи тѣлъ. - - - - -	364.

Полная геометрія содержитъ въ себѣ всѣ предложенія не исключая ни одного.

Сокращенная геометрія, опредѣляется шѣми предложеніями, которыя печатаны обыкновенными буквами, исключая всѣ предложенія мѣлкими буквами печатанныя, также превращеніе, сложеніе, вычитаніе, увеличиваніе и дѣленіе плоскостей и тѣлъ.

Практическая геометрія, какъ полная такъ и сокращенная, заключаетъ въ себѣ опредѣленія и задачи, исключая прочія предложенія и доказательства.





О ГЕОМЕТРИИ ВООБЩЕ.

1. Опредѣленіе. Геометрія или земле-
мѣріе есть наука о величинахъ имѣю-
щихъ пространство или протяженіе, въ
длину, ширину и глубину или высоту,
и о измѣреніи ихъ.

*Протяженныхъ величинъ
суть три рода.*

2. Опредѣленіе. Линія есть величина
имѣющая протяженіе въ одну только
длину безъ ширины и глубины какъ *ab*. No 1.
Ф. 1.
Поверхность есть пространство имѣющее
два измѣренія, въ длину и ширину безъ
глубины какъ *abcd*. И на конецъ *тѣло* Ф. 2.
или *корпусъ* есть пространство имѣющее
три измѣренія, въ длину, ширину и глу-
бину или высоту, какъ фигура *B* значить. Ф. 3.

3. Опредѣленіе. Точка математическая
есть безконечно малое пространство, ко-
торому ни какого измѣренія не полагают-
ся; такъ что оную чи самымъ острѣмъ
концемъ иглы, въ подлинномъ ея видѣ на
бумагѣ, или на другой какойнибудь
поверхности изобразить не можно.

4. Опредѣленіе. Поверхностию вообще
называется величина длину и ширину
Часть II A только.

только имѣющая; а прямая поверхность или плоскость есть та, которой всѣ точки одна въ разсужденіи другой не унижаются и не возвышаются, но въ равномъ расположеніи находятся; какъ на примѣрѣ точки составляющія поверхность гладкой доски. Въ противномъ же случаѣ будетъ поверхность кривая.

Примѣчаніе. I. Изъ втораго опредѣленія видно, что всякое сущее въ свѣтѣ тѣло имѣетъ при себѣ три измѣренія; однако жъ можно разсуждать о каждомъ особенно не касаясь прочихъ, или о двухъ вкупи исключая третіе измѣреніе: на примѣрѣ ежели говорится о разстояніи двухъ городовъ, то разсуждается объ одной только длинѣ дороги, опредѣляющей разстояніе тѣхъ мѣстъ не думая о ея ширинѣ. Если разсуждается о пространствѣ поля, то принимается въ разсужденіе два только измѣренія въ длину и ширину онаго, не помышляя о толщинѣ земли. Когда жъ разсматривается толщина, на прим. каменной стѣны или другаго какого тѣла, то разумѣется о всѣхъ трехъ измѣреніяхъ, то есть о длинѣ, ширинѣ и высотѣ онаго.

Примѣч. II. Въ разсужденіи сего геометрія раздѣляется на три части, изъ коихъ первая разсуждаетъ о свойствѣ линій, и о происхожденіи изъ оныхъ раз-
ныхъ

ныхъ геометрическихъ фигуръ, и называется *Лонгиметрѣю*. *Планиметрѣю* именуется та часть геометріи, которая учить измѣрять поверхности разныхъ геометрическихъ фигуръ. *Стереометрѣя* есть часть геометріи разсуждающая о измѣреніи тѣлъ.

О линѣяхъ и углахъ.

5. Опредѣл. *Линѣи* происходятъ отъ движенія точки. На примѣръ, когда почка, какую въ § 3 мѣ описали, будетъ двигаться отъ одного мѣста *a* къ другому *b*, ф. 4. то слѣдъ ея, которой она по себѣ оставитъ, будетъ линѣя. Посему всякую линѣю воображать можно составленною изъ безконечнаго числа почекъ; слѣдственно и концы линѣи должны быть почки.

6. Опредѣл. *Прямая линѣя* *ab* называется ф. 4. ся та, которая происходитъ отъ прямого движенія почки, съ одного мѣста *a* къ другому *b*.

Кривая линѣя *acb* есть та, которая образуется отъ непрямаго движенія почки, съ одного мѣста *a* до другаго *b*.

Ломаная линѣя *adeb* есть та, которая составляется изъ нѣсколькихъ прямыхъ линѣй, имѣющихъ не прямое положеніе.

Слѣдствіе I. Изъ того явствуетъ, что прямая линѣя *ab*, есть кратчайшая изъ всѣхъ линѣй, кои между двумя точками

a и b проведены быть могутъ; и потому она я испинное ихъ распояніе.

Слѣдствіе II. Между двухъ почекъ a и b , болѣе одной прямой линіи провести не можно, а кривыхъ линій между тѣхъ же почекъ, безконечное множество провести можно; поелику по обѣ стороны почекъ a и b , находится безмѣрное пространство. Еслии жъ двѣ линіи между двумя почками умѣщаются такъ, что одна другую покрываетъ, то сіи между собою равны.

Слѣдствіе III. Положеніе прямой ли-
ф. 5. ній опредѣляютъ двѣ точки a и b ; ибо отъ одной почки a , провести можно безконечное множество не опредѣленныхъ прямыхъ линій; какъ на примѣрѣ ab , ac , ad и прочая, а ежели дастся другой предѣлъ какъ на примѣрѣ b , то прямая линія опредѣлится чрезъ точки a и b , положеніе жъ кривой линіи не иначе опредѣлится, какъ чрезъ множество почекъ.

Слѣдс. IV. Двѣ прямыя линіи взаимно пересѣкутся только въ одной почкѣ; ибо каждая изъ нихъ происходитъ отъ движенія почки, слѣдовательно и взаимное ихъ сѣченіе будетъ почка.

7. Опредѣл. Для измѣренія линій берется линія жъ опредѣленной величины за единицу, какъ то сажень, футъ, дюймъ и пр: и означаются сажени (о), фуфы ('), дюймы (") и такъ далѣе. Для способности
въ

въ выкладкахъ геометрическихъ, всякая сажень раздѣляется на 10 равныхъ частей, изъ коихъ каждая называется футъ; футъ раздѣляется на 10 дюймовъ, дюймъ на 10 линій и проч. и въ разсужденіи такого раздѣленія именуется мѣрою геометрическою.

8. Определ. *Линія круговая* есть изъ ф. 6. всѣхъ кривыхъ линій въ геометріи самая легчайшая и нужнѣйшая, описываемая концемъ *b* прямой линіи *ab*, во время ея обращенія около не подвижной почки *a*. Которой происхожденіе есть слѣдующее: когда вообразимъ себѣ, что прямая линія *ab* будетъ обращаться около одного своего конца не подвижно пребывающаго въ почкѣ *a* до тѣхъ поръ, пока придетъ опять на прежнее свое мѣсто, то другой ея конецъ *b*, во время сего обращенія опишетъ на плоскости помянутую кривую линію *bdceb*. Пространство определенное сею кривою линіею называется *кругъ*. Не подвижная почка *a* центръ (средопочіе) круга. Круговая линія *bdceb* *окружность*. Прямая линія *ab* обратившаяся около почки *a*, называется *радѣусъ* или *полуполерешникъ*. Прямая линія *bac* отъ одной почки *b* окружности къ другой *c* чрезъ центръ проведенная, называется *дѣаметръ* или *полерешникъ*. Линія *cd* проведенная не чрезъ центръ, концами окружности круга касающаяся называется *хорда* (*тетива*).

Часть dc или $dbfc$ окружности круга, называется дугою. Изъ сего видно, что кругъ есть пространство на плоскости определенное такого свойства кривою линіею (окружностью), что всякая оной точка отъ центра a въ равномъ разстояніи находится.

Слѣдс. Изъ того слѣдуетъ, что въ кругѣ всѣ радіусы равны; также и всѣ діаметры равны, поелику каждой діаметръ равенъ суммѣ двухъ радіусовъ.

9. ТЕОРЕМА. Всякой кругъ и окружность онаго, діаметромъ eb разрѣзывается на двѣ равныя части.

Доказательство. Представимъ себѣ, что часть круга efb съ діаметромъ eb , положится на другую часть $ecdb$, то всѣ точки части окружности efb , не премѣнно упадутъ на всѣ точки другой части $ecdb$ (8), посему пространство части круга efb , закроетъ совершенно пространство части круга $bdce$; слѣдовательно оныя части равны между собою, и каждая равна половинѣ круга. Также и часть окружности efb равна части окружности $bdce$. Но есть ли кто скажетъ, что точка f упадетъ внѣ или внутрь части круга $ecdb$, въ такомъ случаѣ всѣ точки окружности круга efb , уже не будутъ въ равномъ разстояніи отъ центра, что будетъ положенію противно.

Слѣдс.

Слѣдс. Изъ сего не посредственно видно, что на всякой прямой линіи *ab* изъ какой нибудь точки на пр. *a*, всякимъ радіусомъ опишется полукруга.

10. Опрѣдѣл. Геометры раздѣляютъ окружность всякаго круга на 360 равныхъ частей *) изъ коихъ каждая называется градусъ, каждой градусъ на 60 равныхъ частей называемыхъ минуты, каждую минуту на 60 секундъ, секунду на 60 терцій и такъ далѣе. Градусы означаются (°) какъ сажени, минуты (') какъ фуры, секунды (") какъ дюймы и проч. на примѣрѣ

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

7, 28, 32, 52, значить 7 градусовъ, 28 минутъ, 32 секунды, 52 терцій.

Примѣчаніе. Понеже градусъ есть $\frac{1}{360}$ часть окружности круга: но окружности круговъ могутъ быть различной величины, посему и градусы одинакой величины быть не могутъ; слѣдовательно градусъ есть количество не опредѣленное какъ на примѣрѣ фуры или сажень, но такая величина, которая относится къ своей окружности, о чемъ прилѣжнѣе примѣчать надлежитъ.

II. Опрѣдѣленіе. Когда двѣ линіи *ab* ф. 7. и *ac* концами сойдутся въ одну точку *a*; то взаимное оныхъ наклоненіе или ихъ опверстіе называется плоскостной уголъ. Линіи *ab* и *ac* называются боками угла. Точка *a* именуется верхъ угла.

А 4

углы

*) Причина сего раздѣленія есть та, что число 360 на многія равныя части раздѣлиться можетъ.

Углы въ разсужденіи боковъ раздѣляются на три рода.

- ф. 7. 12. Опредѣл. Прямолинейной уголъ *bac* есть пошѣ, котораго бока прямая линѣя.
 ф. 8. Криволинейной, коего бока кривая линѣя какъ *edf*. Смѣшаннолинейнымъ угломъ на-
 ф. 9. зывается, которой состоятъ изъ прямой и кривой линѣи какъ *gfh*.

Примѣч. Уголъ означается одною ли-
 ф. 10. перою, у верьха угла написанною, на примѣрѣ *a*. А когда нѣсколько угловъ будутъ имѣть общіи верьхъ *a*; въ такомъ случаѣ означается премо, какъ *bag*, изъ коихъ средняя всегда означаетъ верьхъ угла.

13. ТЕОРЕМА. За мѣру угла берется дуга *bd* изъ верьхи его *a* произвольнымъ радіусомъ описанная.

Доказ. Ибо представитъ можно, что
 ф. 10. уголъ происходиѣ равно какъ кругъ, то есть, ежели вообразимъ себѣ что бокъ *ad* угла *dab* положенъ на бокъ *ab*, и почка *d* находится въ точкѣ *b*, потомъ не опредѣляя одного своего конца отъ точки *a*, другимъ *d* начнетъ отдвигаться; по почка *d* будетъ описывать дугу *bged*, и чѣмъ далѣе отъ линѣи *ab* отходитъ будетъ, тѣмъ и дуга *bged* будетъ по степенно увеличиваться, по сему дуга *bged* опредѣляетъ величину отперстія угла *bac*; слѣдовательно вмѣсто отперстія угла *bac*, можно

можно принять за мѣру дугу bd , изъ верха его произвольнымъ радиусомъ описанную.

Слѣдс. I. Понеже мѣра угла есть частъ окружности круга, того ради сколько дуга bd или cf содержитъ въ себѣ градусовъ, минушъ и проч. столько оныхъ и уголъ bad имѣшъ будешъ; слѣдовательно величина уголъ познается изъ содержанія дугъ къ цѣлымъ окружностямъ круговъ.

Слѣдс. II. Мѣра уголъ не зависитъ отъ длины боковъ, но отъ наклоненія, которое дѣлающъ линіи уголъ соспаряющія. Іе, углы будущъ равны, которыхъ наклоненія боковъ между собою равны, то есть, когда одинъ уголъ съ другимъ такъ сходствуешъ, что ежели положи верхъ одного на верхъ другаго, бока одного упадущъ на бока другаго не смотря на неравенство боковъ, тогда углы будущъ равны между собою. 2е, уголъ bad измѣряется дугою bd , также и дугою cf , изъ коихъ каждая имѣешъ одно число градусовъ отъ своей окружности (§ 13); слѣдовательно величина угла не перемѣнишся, когда его бока ac и af будущъ короче или болѣе нежели ab и ad .

Примѣч. Понеже уголъ увеличиться и уменьшиться можешъ (§. 13): то безъ всякаго сомнѣнія углы между количествами почишашъ должно; съ пою разностию, что они въ разсужденіи различной вели-

чины градусовъ, особой родъ количествъ составляющъ, и пошому опмѣннымъ образомъ измѣряющся.

Ф. II 14. **Опредѣл.** Прямой уголъ *bac* есть пошъ, котораго мѣра чепверть окружности *cfe*. Острой уголъ *cad* есть пошъ, коего мѣра дуга *cf* менѣ чепверти окружности. Уголъ *gad* тупой, котораго мѣра дуга *gef* болѣ чепверти окружности; по сему всякой прямой уголъ имѣетъ 90 град. острой меньше, а тупой больше 90 град.

15. **Опредѣл.** Смѣжные углы называющся шъ, кои имѣютъ общій верхъ *a* и общій бокъ *ad*, какъ *ead* и *cad*. или *gad* и *dac*.

16. **ТЕОРЕМА.** Ежели нѣсколько линій *ab*, *ad* и проч. сойдутся въ одну точку *a* лѣжащую на прямой линіе *сг*, то сумма всѣхъ угловъ будетъ равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град.

Доказательство. Изъ точки *a* какъ изъ центра на прямой линіе *гас* опиши полукруга; по мѣра всѣхъ угловъ *cad*, *dab*, и *bag*, будетъ равна половинѣ окружности круга (§ 13), которая содержишъ въ себѣ 180 град. по сему и сумма всѣхъ угловъ, равна двумъ прямымъ угламъ (§ 14) или 180 град.

Слѣдс. Ежели въ точку *a*, упадетъ одна линія *ab* такъ, что смѣжные углы *gab*

gab и bac будутъ равны, по каждой изъ нихъ будетъ равенъ прямому. Ибо дуга $ge = cfe$, равна четверти окружности круга.

17. ТЕОРЕМА. Если нѣсколько линій ac , cn , cb и проч. сойдутся въ одну точку c ; то сумма всѣхъ угловъ, будетъ равна четыремъ прямымъ угламъ или 360 град.

Доказ. Изъ точки c взятой за центрѣ ф. 12. опиши кругъ. Общій верхъ угловъ будетъ находиться въ точкѣ c ; чего ради содержащіяся между каждыми двумя боками ac , ce , cd , cb и cn дуги, будутъ мѣрою тѣхъ угловъ (13), кои вообще составляютъ цѣлую окружность круга, содержащую въ себѣ 360 град. или четыре прямыхъ угла (914).

18. Опредѣл. Уголъ cad дополненіемъ ф. II. угла dab къ прямому углу cab называется пошѣ, которой съ мѣжнымъ угломъ bad составляетъ 90 град. Уголъ cad дополненіе угла dag до двухъ прямыхъ угловъ или 180 град. есть пошѣ, которой съ смѣжнымъ угломъ dag составляетъ 180 град.

Слѣдс. I. Того ради дополненіе острого угла bad къ прямому bac , есть уголъ острый dac . Дополненіе жъ до двухъ прямыхъ угловъ или 180 острого угла cad , тупой gad ; а тупаго gad , острый dac ; прямого gab прямой bac .

Слѣдс. II. Изъ сего явствуетъ, что дополненія равныхъ угловъ, равны между собою, и обратно, когда дополненія угловъ равны, то и дополняемые углы равны между собою.

19. Опредѣл. Углы противоположенные
 ф 13. *bac* и *dae* также *dac* и *bae* суть шѣ, коихъ бока *ab* и *ac* одного угла, находятся въ прямомъ положеніи противъ боковъ *ac* и *ad* другаго.

20. ТЕОРЕМА. Углы *m* и *n* противоположенные, равны между собою.

Доказ. Уголъ $m + y = 180$ град. и уголъ $y + n = 180$ град. (§. 16), посему $m + y = y + n$ (ариф. §. 30); а отнявъ отъ обоихъ количествъ величину *y*, останется уголъ $m = n$ (ариф. 34); такимъ же образомъ докажется что уголъ $a = y$.

21. Опредѣл. Перпендикулярная линѣя
 ф II. *ab* есть та, которая падаетъ на другую *gc* такъ, что съ обѣихъ сторонъ углы *gab* и *bac* будутъ равны, то есть когда каждой изъ сихъ будетъ уголъ прямой.

22. Опредѣл. Параллельныя или равно-
 ф 14. разстоящія линіи *ab* и *cd* суть шѣ, кои будучи продолжены въ обѣ стороны, никогда сойтись не могутъ, или шѣ между коими перпендикулярныя *ef* и *gh* къ параллельнымъ *ab* и *cd* равны.

О ФИГУРАХЪ, О РАВЕНСТВѢ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ,
О СВОЙСТВѢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХЪ И ПАРАЛ-
ЛЕЛЬНЫХЪ ЛИНІЙ, И О УГЛАХЪ РАЗНЫХЪ
ФИГУРЪ.

23 Опредѣл. Фигурою называется про-
странство на плоскости линіями, опредѣ-
ленное.

24 Опредѣл. Фигуры прямолинейныя
суть тѣ, кои ограничиваются прямыми ф. 15.
линіями, какъ *А*. Криволинейными называ-
ются тѣ, которыя опредѣляются кри- ф. 16.
выми линіями, какъ *В*.

Примѣчаніе. Всякая прямолинейная фи-
гура сколько имѣетъ угловъ, сколько
боковъ въ фигурѣ находится; а чтобъ
прямолинейная фигура пространство меж-
ду предѣлами своими заключала, по край-
ней мѣрѣ три бока имѣть должна.

25. Опредѣл. Плоскія прямолинейныя
фигуры названіе свое получаютъ отъ
числа боковъ или угловъ. Фигура окружен-
ная тремя боками называется *треуголь-*
никъ, четырьмя *четвероугольникъ*, пятью
боками ограниченная *пятиугольникъ* и
такъ далѣе. Во обще фигуры плоскія
прямолинейныя больше нежели четыре
бока имѣющія, (полигонами) *многоуголь-*
никами именуются.

Примѣч. Происхожденіе *треугольника*
легко вообразить можно, ежели концы
двухъ линій *ab* и *ac* уголъ составляющихъ ф. 17.
соединены,

соединены будущъ прямою линіею bc ; то произойдетъ треугольникъ abc .

26. **Опредѣл.** Треугольники въ разсужденіи ихъ боковъ и угловъ имѣютъ различныя названія. **Равносторонный** треугольникъ abc есть тотъ, котораго всѣ бока между собою равны. **Равнобедренный** cdf , котораго два бока cd и fd равны, а третій cf болѣе или менѣе одного изъ оныхъ. **Неравносторонный** def , коего всѣ три бока не равны. **Прямоугольный** треугольникъ abe есть тотъ, коего одинъ уголъ a прямой. **Тупоугольный** ghf , котораго одинъ изъ трехъ уголъ ghf тупой. **Остроугольный** ced , котораго всѣ три угла острые. Въ прямоугольномъ треугольнике abc , бокъ bc лежащій противъ прямого угла называется **дѣгоналъ**.
27. **Опредѣл.** **Параллелограмъ** B есть чепвероспоронникъ, котораго противу лежащіе бока и углы равны, а когда въ параллелограмъ всѣ углы будутъ прямые, тогда оной называется **прямоугольникомъ**, какъ $dт$. **Квадратъ** $abcd$ такой чепвероспоронникъ, коего всѣ бока равны и углы прямые; а ежели въ чепвероспоронникъ всѣ бока и противулежащіе углы равны, то называется **наклоненный квадратъ** или **ромбъ**, какъ G . Чепвероспоронникъ коего только два противулежащіе бока ad и bc параллельны, называется **трапеція**.

28. Опредѣл. Во всякомъ чепвероуголь-
никѣ $abcd$, прямая линѣя ac соединяющая ф. 23.
противулежащїе углы, называется дїо- и 27.
гональ (поперешникъ).

Примѣч. Всякой чепвероугольникъ озна-
чается чепырмя лиферами $abcd$, или
двумя a и c означающими дїогональ че-
пвероспоронника.

29. Опредѣл. Во всякомъ треугольни-
кѣ acd или чепвероспоронникѣ ac , осно-
ванїемъ называется та линѣя какъ здѣсь ф. 27.
 ad , на которую или на продолженїе ея и 28.
 dm изъ противулежащаго угла c другая
 cm падаетъ перпендикулярно. Перпенди-
кулярная жъ cm именуется высота тре-
угольника, или чепвероугольника. Верхъ
угла c , которой противуполагается осно-
ванїю называется верхъ фигуры.

30. ТЕОРЕМА. Два треугольника abc и
 def будутъ во всѣхъ частяхъ совершенно
равны, когда два бока ab и bc и между
ими уголъ abc , равны двумъ бокамъ
 de и ef и между ими углу def другаго
треугольника.

Доказ. Представъ себѣ, что тре-
угольникъ abc положенъ на треугольникъ
 def такимъ образомъ, что точка b упала ф. 29.
на точку e , и бокъ ab упалъ на бокъ
 de : то въ разсужденїи равенства боковъ,
точка a упадетъ на точку d ; а для ра-
венства

венства угловъ abc и def , бокъ bc упадетъ на ef , и точка c будетъ въ точкѣ f , бокъ ac упадетъ на df и его закроетъ; по сему треугольники abc и def другъ друга во всѣхъ частяхъ закроетъ; слѣдственно совершенно равны, по сему уголъ $a = d$, $c = f$ и бокъ $ac = df$.

31. ТЕОРЕМА. Когда бокъ ac и при немъ два угла a и c одного треугольника abc , равны боку df и при немъ двумъ угламъ d и f другаго треугольника def ; такіе треугольники между собою во всѣхъ частяхъ совершенно равны.

Доказ. Понеже $ac = df$: то ежели треугольника abc , бокъ ac положится на бокъ df такъ, что бы точка a упала на точку d , то точка c непременно упадетъ въ точку f , и для равенства угловъ a и c , d и f бокъ ab долженъ будетъ упастъ на de , и бокъ bc упастъ на ef (13); слѣдовательно точка b упадетъ на точку e : но ежели кто скажетъ, что точка b не можетъ упастъ на точку e , а упадетъ на другую какую нибудь на примѣръ g , тогда будетъ $dg = ab$, и проведя линію gf , будетъ уголъ $acb =$ углу dfg , что противно положенію; чего ради бокъ dg не можетъ быть равенъ боку ba , и точка b не можетъ упастъ въ точку g . Также докажется и о всякой другой точкѣ g , которая будетъ ближе или далѣе отъ поч-

ки e ; слѣдовательно почка b не премѣнно упасшь должна на почку e , при чемъ будешъ $ab = de$, $bc = ef$ и уголъ $b = e$.

32 ТЕОРЕМА. Во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ abc , противъ равныхъ боковъ ac и bc , углы a и b равны между собою.

Доказ. Представъ себѣ мысленно, что изъ ф. 30 верьха с проведеною на основаніе ab линіею cd , уголъ acb раздѣленъ на двѣ равныя части; опъ чего будетъ уголъ $acd = bcd$, бокъ $ac = bc$ по положенію, и dc есть общій бокъ треугольникамъ acd и dcb ; слѣдовательно треугольники acd и dcb равны между собою (30); и уголъ $dac = dbc$, $adc = bdc$, линія $ad = bd$, по сему dc перпендикулярна къ ab (21).

Слѣдс. Изъ сего явствуемъ, что во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ основаніе ab , перпендикуляромъ cd дѣлится на двѣ равныя части.

33. ТЕОРЕМА. Ежели три бока треугольника abc , равны лорознь тремъ бокамъ другаго треугольника gef , на примѣръ $ab = gf$, $ac = ge$, $bc = fe$; то такіе треугольники между собою во всѣхъ частяхъ будутъ равны.

Доказ. Ежели треугольникъ gef весь ф. 31. приложитъ къ треугольнику abc такъ, чтобъ бокъ gf упалъ на бокъ ab , почка

g упалабы на точку a , и f на точку b , а точка e пусть будетъ на примѣрѣ въ точкѣ d : то проведя линію dc , буденѣ $ad = ac$ и $bd = bc$ по положенію, чего ради уголъ $acd = adc$, и $dcb = bdc$ (32); по сему уголъ $(acd + dcb) acb \stackrel{**}{=} (adc + bdc) adb$ (ариф. 33); слѣдовательно преугольникъ $acb = adb$ (30): но преугольникъ adb есть преугольникъ gef по положенію, слѣдовательно преугольникъ $acb = gef$. уголъ $a = g$, $b = f$ и $c = e$.

34. ТЕОРЕМА. Когда два бока ac и cb составляющія острой уголъ acb , прямоугольнаго преугольника abc , будутъ равны бокамъ ef и fg другаго преугольника egf ; то такіе преугольники между собою во всѣхъ частяхъ равны.

Доказ. Вообразимъ себѣ, что преуголь-
ф. 32. никъ egf приложенъ къ преугольнику abc такъ, что бокъ ef упалъ на bc , точка f на точку c , по сему и точка e упадетъ на точку b : но какъ углы abc и feg прямые; то точка g съ точкою a будутъ въ прямой линіе (21). Треугольникъ abc
по

(*) Ежели въ какомъ нибудь доказательствѣ какъ здѣсь, разныя величины написаны будущи въ скобкахъ не раздѣльно, будучи соединены знакомъ равенства съ другими величинами; то сіе значить что всѣ величины первой и второй части равны между собою. На пр. $ab(cd)(adc + bdc) = ad(apc + gmq)(mq)$, значить что $ab = ad = cd = mq = adc + bdc = apc + gmq$.

по (30) будетъ равенъ bcg ; ибо уголъ $abc = cbg$ прямые, и для равнобедреннаго треугольника agc боки $ab = bg$ (32), bc общая: но треугольникъ bcg есть треугольникъ egf , следовательно треугольникъ $abc = egf$, и $ab = eg$, уголъ $a = g$, $c = f$.

35. ТЕОРЕМА. Во всякомъ треугольникѣ abc , сумма двухъ боковъ $ac + bc$, больше третьяго ab .

Доказ. Когда прямая ab есть кратчайшая между почками a и b (6); то е, ф. 30 что всякая другая линия кромѣ прямой соединяющая двѣ почки a и b , будетъ больше прямой ab . **2е** естли вообразимъ, что $ac + bc$ равна или меньше ab ; то такія линіи положиться могутъ на линію ab , не занимая никакого пространства, что положенію противно; следовательно $ac + bc > ab$.

36. ЗАДАЧА. На данной прямой линіе ab , начертить равносторонній треугольникъ.

Рѣшеніе. Поставя ножку циркуля въ почкѣ a , разтвореніемъ линіи ab начерпи ф. 33 дугу y ; по томъ поставя ножку циркуля въ почкѣ b , тѣмъ же разтвореніемъ опиши другую дугу x , которая пересѣчетъ первую въ почкѣ c , изъ a и b проведи къ c прямыя линіи ac и bc , при чемъ

чемъ произойдетъ требуемой равнос-
торонный треугольникъ abc

Доказ. $ab = ac$ и $ab = bc$ по рѣшенію,
по сему и $ac = bc$ (ариф. 30); слѣ-
довательно всѣ три бока равны между
собою , и треугольникъ abc есть равно-
сторонный (26).

37. ЗАДАЧА. Изъ трехъ данныхъ
линій ab , bc и ac , изъ коихъ сумма
всякихъ двухъ линий больше третьей,
начертить треугольникъ.

Рѣшеніе и доказ. Одну изъ данныхъ
ф. 34 линий на примѣръ ab возьми за основаніе,
изъ точки b разтвореніемъ линіи ac
опиши дугу , потомъ изъ точки a , раз-
твореніемъ линіи bc опиши другую дугу,
которая по причинѣ что $bc + ac > ab$
пересѣчетъ первую въ точкѣ c , на ко-
нцѣхъ проведя линіи ac и bc , получишь
требуемой треугольникъ.

Примѣч. Ежели дуги не пересѣкутся,
то изъ данныхъ трехъ линій, треуголь-
ника сдѣлать не можно.

38. ЗАДАЧА. По даннымъ двумъ ли-
ніямъ ab и bc , начертить равнобедрен-
ный треугольникъ.

Рѣшен. Линію ab возьми за основаніе,
ф. 35 изъ крайнихъ оной точекъ a и b , разтво-
реніемъ линіи bc опиши дуги взаимно
себя

себя пересѣкающія въ точкѣ c ; потомъ проведя линіи ac и bc , получишь требуемой треугольникъ,

Доказ. Бокъ ac равенъ bc , равнымъ разтвореніемъ дуги описаны; слѣдовательно треугольникъ abc есть равнобедренный (26).

39. ЗАДАЧА. Прямую линію ab , раздѣлить на двѣ равныя части.

Рѣшен. На данной линіи ab , сдѣлай **№ 2** по обѣ стороны равносторонные или рав- **ф. 36** нобедренные треугольники abd и abc (36.38); чрезъ точки c и d проведи прямую линію cd , которая раздѣлитъ данную линію ab въ точкѣ e на двѣ равныя части.

Доказ. Бокъ $ac = bc$, $ad = bd$ и dc общимъ треугольникамъ adc и dbc есть общий бокъ; по сему треугольникъ $adc = dbc$, и уголъ $acd = bcd$ (33); также треугольникъ $aec = bec$; ибо $ac = bc$, ce общая и уголъ $ace = bce$, слѣдовательно и $ae = be$ (30).

40. ЗАДАЧА. Изъ точки a , на прямой линіи es , поставитъ перпендикуляръ.

Рѣшен. Поставя ножку циркуля въ точкѣ a , положи по обѣ стороны оной **ф. 37** по изволенію равныя части ab и ac , изъ точекъ b и c разтвореніемъ взятымъ **Б 3** больше

болѣе половины bc , начерти дуги взаимно себя пересѣкающія въ точкѣ d , попомѣ чрезъ оную проводи прямую линію ad , которая будетъ перпендикулярна къ ec .

Доказ. Треугольникъ $abd = adc$, потому что $bd = dc$ равнымъ разтвореніемъ циркуля дуги описаны , также $ab = ac$ по положенію , ad общая ; по сему и уголъ $bad = cad$ (33) , слѣдовательно ad перпендикулярна къ ec .

41. ЗАДАЧА. Изъ данной точки c , на данную прямую линію ab , опустить перпендикуляръ.

Рѣшен. Изъ данной точки c , произвольнo взятымъ радіусомъ ec опиши дугу ed , которая бы прорѣзала линію ab въ двухъ точкахъ e и d ; линію ed раздѣля на двѣ равныя части въ точкѣ g (39) , проводи прямую линію cg , которая будетъ перпендикулярна къ ab .

Доказ. Треугольникъ $egc = dgc$, потому что бокъ $ce = cd$ радіусы , $eg = gd$ по рѣшенію , cg общій бокъ обоимъ треугольникамъ , по сему уголъ $egc = cgd$ (33) ; слѣдовательно cg къ линіе ba (21) перпендикулярна.

42. ТЕОРЕМ. Изъ точки c на линіе ab , больше одного перпендикуляра cd поставить не можно.

Доказ.

Доказ. Положимъ, что другая линѣя ce будетъ перпендикулярна къ ab : но какъ $\angle ace$ меньше угла acd и меньше равнаго ему угла bcd , также меньше угла bce (14); слѣдовательно линѣя ce къ линѣе ab не перпендикулярна. Ф. 39

43. ТЕОРЕМА. Изъ точки g на линѣю ab , больше одного перпендикуляра ge олустить не можно.

Доказ. Положимъ, что gf будетъ перпендикулярна къ ab . Во отвращеніе чего опредѣли отъ точки e , на обѣ стороны произвольной величины равныя части ed и es , проводи eg и dg , будетъ треугольникъ ced равнобедренный. Ибо треугольникъ $ceg = deg$, по тому что уголъ $ceg = deg$ прямые, бокъ $ce = ed$ по положенію, ge общій бокъ обоемъ треугольникамъ; чего ради и $cg = gd$ (30): но $ce = ed$, по сему $ce + ef > ce$ и $> fd$, и такъ gf падаетъ не на половину основанія cd равнобедреннаго треугольника cdg , слѣдовательно не перпендикулярна къ ab (32). Ф. 40

44. ТЕОРЕМ. Перпендикулярная ab короче всѣхъ другихъ линѣй ac и ad , изъ точки a къ линѣе eb проведенныхъ.

Доказ. Продолжа линѣю ab , сдѣлай $bf = ab$, проводи cf . Треугольникъ abc будетъ $= bcf$; ибо $ab = bf$, bc общая, и уголъ $abc = fbc$ прямые, по сему $ac = cf$; но ломаная Ф. 41

мая линѣя $acf > abf$ (6), слѣдовательно ac равная половинѣ первой линѣи acf больше нежели ab равная половинѣ другой af . Также докажемся, что ad и проч. больше ab .

45. ЗАДАЧ. На данной линѣе ab , сдѣлать уголъ равенъ данному углу gfh .

Рѣшен. Изъ точки f произвольно взятымъ разтвореніемъ циркуля, между боками даннаго угла начерти дугу ik , точки i и k соедини хордою ik ; потомъ тѣмъ же разтвореніемъ циркуля, на данной линѣе ab , изъ точки a начерти дугу de , на которой положи хорду de равну ik , чрезъ точку e проводи линѣю ac , будетъ уголъ bac равенъ данному углу gfh .

Доказ. Понеже $ad = fi$, $ae = fk$, и $de = ki$ по рѣшенію, того ради треугольникъ $ade = fik$ (33); слѣдовательно и уголъ $bac = gfh$.

46. ЗАДАЧ. Данной уголъ bac раздѣлить на двѣ равныя части.

Рѣшен. Изъ верьха a даннаго угла, положи соизволяющей величины равныя линѣи ad и ae , потомъ изъ точекъ d и e произвольно взятымъ разтвореніемъ циркуля, начерти дуги пересѣкающія другъ друга въ точкѣ f ; на конецъ изъ верьха a чрезъ точку f протяни линѣю af , которая данной уголъ bac раздѣлитъ на двѣ равныя части.

Дока-

Доказ. Проведя линѣи df и ef треугольникъ afd будетъ $= aef$; ибо $ad = ae$, $df = ef$ положенію, и af общая, слѣдовательно и уголъ $daf = eaf$ (33).

47. ЗАДАЧ. По двумъ линѣямъ ab , ac и углу x , начертить треугольникъ, чтобъ данной уголъ x заключался между данными линѣями.

Рѣшен. и доказ. Взявъ линѣю ab за основаніе сдѣлай у почки a уголъ $bac = \Phi$. 44 данному x (45); опредѣли линѣю ac равную данной ac , на конецъ соединя почки b и c прямою линѣею bc , произойдетъ требуемой треугольникъ abc .

48. ТЕОРЕМ. Если двѣ параллельныя линѣи ab и cd , пересѣкутся третіею ef , то углы agf и ehd на крестъ, будутъ равны между собою.

Доказ. Изъ почекъ g и h проводи къ параллельнымъ cd и ab перпендикулярныя gi и hk (41), которыя будутъ означать разстояніе параллельныхъ линѣй ab и cd (44) и равны между собою (22). И такъ въ треугольникахъ ghi и ghk , будутъ углы i и k прямые; перпендикулярная $gi = hk$ и бокъ gh общимъ треугольникамъ общій; того ради треугольникъ ghi равенъ треугольнику ghk (34); слѣдовательно и уголъ $agf = ehd$.

Б 5 — Слѣдс.

Слѣдс. I. Когда двѣ параллельныя линіи ab и cd , пересѣчены будутъ третіею ef , то въ одну сторону лежащіе углы agf и chf будутъ равны между собою. Ибо по предѣидущей теоремѣ уголъ $agf = ghd = chf$ (20); по сему уголъ $agf = chf$ (ариф. 30). Также докажется, что и уголъ $bgf = dhf$.

Слѣдст. II. Сумма угловъ $bgh + dhg$ внутрь параллельныхъ линій, равна двумъ прямымъ угламъ. Ибо уголъ agf съ угломъ $bgh = 180$ град. (16): но уголъ $agf = dhg$ слѣдовательно $bgh + dhg = 180$ град. или двумъ прямымъ угламъ.

Слѣдст. III. Ежели нѣсколько параллельныхъ линій ab , cd , gn и проч. пересѣкутся линіею ef : то углы eib и ghf будутъ равны между собою; попому что углы eib и ehn по первому слѣдствію равны между собою, но уголъ $ghf = ehn$ (20); слѣдовательно уголъ $ghf = eib$.

49. ТЕОРЕМ. Ежели двѣ линіи ab и cd пересѣкутся третіею ef такъ, что уголъ agf будетъ равенъ углу ehd , то линіи ab и cd будутъ параллельны между собою.

Доказ. Изъ точки g на линію cd опустя перпендикуляръ gi сдѣлай $kg = hi$, проведи hk . Треугольникъ igh будетъ равенъ kgh : попому что бокъ gh обоимъ
пре-

треугольникамъ общій, и $kg = hi$ уголъ $kgb =$ углу ghi по положенію; по сему уголъ $gih = gkh$ прямые, и $kh = gi$ (30), но равныя kh и gi перпендикулярны къ ab и cd , того ради линіи ab и cd находясь другъ отъ друга въ равномъ разстояніи; слѣдовательно параллельны между собою (22).

Слѣдс. I. Ежели двѣ линіи ab и cd пересѣчены будутъ премою ef такъ, что уголъ egb равенъ будетъ углу ehd , то линіи ab и cd будутъ параллельны; ибо уголъ $egb = agf$ (20) $= ehd$ по положенію, по сему $ehd = agf$ (ариф. 30); слѣдовательно линіи ab и cd параллельны.

Слѣдс. II. Линіи ab и cd будутъ параллельны, ежели премою линію ef пересѣкаетъ оныя такъ, что сумма внутреннихъ угловъ $bgf + ehd$ равна двумъ прямымъ угламъ; ибо уголъ $agf + bgf =$ двумъ прямымъ угламъ (16), также $bgf + ehd =$ двумъ прямымъ угламъ по положенію, по сему $agf + bgf = bgf + ehd$ (ариф. 30); а отнявъ отъ равныхъ количествъ уголъ bgf , останется уголъ $agf = ehd$ (ариф. 34), слѣдовательно линіи ab и cd параллельны между собою.

50. ТЕОРЕМ. Ежели двѣ параллельныя линіи ab и cd , пересѣкнутся двумя параллельными жъ ef и gh , то противолежащія стороны ki , tl также kl и ti , заключаю-

закрывающіяся между параллельныхъ линій будутъ равны.

Доказ. Проведя линію il , будетъ въ ф. 47 треуголькахъ iml и ikl уголъ $lim = kli$ и $mi = ki$ (48), и припомъ бокъ il обоимъ треугольникамъ общій; по сему треугольникъ $iml = lik$ (31), слѣдовательно и линіи $ik = ml$, $kl = mi$.

51. ТЕОРЕМ. Во всякомъ параллелограмѣ $abcd$, противуположащіе бока ad , bc и ab , dc параллельны.

Доказ. Проведя ac , треугольникъ adc № 1 будетъ $= abc$: ибо $ad = bc$, $dc = ab$, ac ф. 23 общій бокъ, по сему треугольникъ $acd = cab$, уголъ $dac = bca$ (33); того ради линія ad параллельна bc и dc параллельна ab (49).

52. ЗАДАЧ. Изъ точки c , проведи линію cd параллельную данной линіе ab .

Рѣшен. Чрезъ точку c проведи произвольную линію ce , которая бы пересѣкла ф. 48 линію ab въ точкѣ e . Сдѣлай уголъ ecd равенъ ceb (45); то проведенная чрезъ точку d линія cd , будетъ параллельна къ линіе ab (49).

53. ТЕОРЕМ. Во всякомъ треугольникѣ abc наружной уголъ bcd , равенъ двумъ внутреннимъ противуположащимъ угламъ $cab + abc$.

Доказ.

Доказ. Изъ точки c пропяти линію ce въ паралель боку ab (52), будетъ уголъ ecd равенъ углу bac , и уголъ $ecb =$ углу abc (48); посему сумма угловъ $ecd + bce$, то есть уголъ $bcd =$ углу $cab + abc$. ф. 49

Слѣдс. I. Во всякомъ треугольникѣ abc , сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град. Ибо по предѣдущей теоремѣ уголъ $bcd = cab + abc$, а придавъ къ симъ уголъ acb , будетъ уголъ $bcd + acb = cab + abc + acb$ (ариф. 33); но $bcd + acb =$ двумъ прямымъ угламъ или 180 град. (16), слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ $cab + abc + acb$ равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град. (ариф. 30).

Слѣдс. II. Ежели два угла треугольника извѣстны, то третій онаго уголъ существуетъ, когда сумма двухъ извѣстныхъ угловъ вычтется изъ 180 град. остатокъ будетъ число градусовъ искомаго угла.

Слѣдс. III. Когда два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго треугольника, то и третій третьему не премѣнно равенъ; также ежели уголъ одного треугольника равенъ углу другаго, то и сумма двухъ перваго, равна суммѣ двухъ угловъ втораго треугольника.

Слѣдс. IV. Когда въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой, то сумма прочихъ угловъ

угловъ равна прямому жѣ или 90 град. и такъ когда въ треугольникѣ будетъ одинъ уголъ прямой или тупой, то прочіе будутъ острые, поелику каждой изъ нихъ меньше прямого; слѣдовательно во всякомъ треугольникѣ не можетъ быть болѣе какъ одинъ уголъ прямой или тупой; чего ради въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ острые углы суть по 45 град. (32). Въ равноспоронномъ треугольникѣ каждой уголъ $= \frac{2}{3}$ прямого угла или $\frac{180}{3} = 60$ град.

54. ТЕОРЕМА. Треугольники abc и def будутъ совершенно равны, когда два бока ac и bc одного, равны двумъ бокамъ df и ef другого, и углы a и d противолежаще разнымъ бокамъ bc и ef равны; при томъ же углы abc и def будутъ острые или тупые.

Ф. 50 Доказ. Положимъ что углы b и e острые. Изъ верховъ c и f опуски перпендикуляры cg и fh къ ab и de (41), треугольникъ agc будетъ $= dfh$: ибо бока $ac = df$, уголъ $a = d$ по положенію, уголъ $agc = dhf$ прямые; чего ради уголъ $atg = afh$ (53), посему и $ag = dh$, $cg = fh$ (31), также треугольникъ $bgc = ehf$, потому что уголъ $bgc = ehf$ прямые, $gc = hf$ доказано, и $cb = ef$ по положенію, посему $bg = he$ (34): и такъ $(ag + bg) ab = (dh + he) de$ (ариф. 33); слѣдовательно треугольникъ $atb = def$ (30 и 33).

Ф. 51 Въ другомъ случаѣ. Когда углы abc и def тупые и бока $cb = ef$. Изъ верховъ c и f на продолженныя основанія ab и de . опуски перпендикуляры cg и fh (41). Треугольникъ agc будетъ $= dfh$, и $cg = fh$ докажется какъ и въ первомъ случаѣ; пожѣ докажется и въ прямоугольныхъ треугольникахъ cbg и feh что $bg = he$ (34), наконецъ $(ag - gb) ab = (dh - he) de$ (ариф. 34); слѣдовательно треугольникъ $atb = defe$ (30 и 33).

Примѣч.

Примѣч. Когда въ такихъ треугольникахъ не ф. 52
будетъ упомянуто что углы abc и def острые или
тупые: то равенство сихъ треугольниковъ будетъ
сомнительное. Ибо когда изъ верха e описать дугу
 be , то треугольникъ ace сдѣлается меньше abc
(ариф. 32), и бока bc и $ce = ef$, $ac = df$, и уголъ
 $cab = edf$ останутся неизмѣнными, посему равенство
треугольниковъ будетъ сомнительное.

55. ТЕОРЕМА. Во всякомъ треуголь-
никѣ, когда уголъ $a = b$, то и бокъ
 ac будетъ $= bc$.

Доказ. Изъ точки c на основаніе ab
опусти перпендикуляръ cd (41). въ пре-
угольникахъ acd и bcd , будетъ уголъ cd № 1
 $=$ углу adc прямые, и уголъ $a = b$ ф. 30
по положенію; по сему уголъ $bcd = acd$
(53), и бокъ dc общимъ треугольникамъ
общій, слѣдовательно треугольникъ adc
 $= bdc$ и бокъ $ac = bc$ (31).

56. ТЕОРЕМА. Во всякомъ треуголь-
никѣ abc , когда уголъ abc больше угла
 a , то и бокъ ac больше бока bc .

Доказ. У точки b сдѣлай уголъ $abd =$ № 2
углу a (45). Будетъ бокъ $bd = ad$ (55); ф. 53
но $dc + db > bc$ (35); слѣдовательно
 $(dc + ad)ac > bc$.

57. ТЕОРЕМА. Въ треугольникѣ abc
когда бокъ ab больше бока ac , то и
уголъ acb будетъ больше угла abc .

Доказ. На основаніи ab опредѣли ли- ф. 54
нѣю ad равну меньшей ac , уголъ acd
будетъ

будетъ $\equiv adc$ (32). Уголъ adc или acd больше угла abc (53), къ углу acd придай уголъ dcb , будетъ уголъ $(acd + dcb)$ acb еще и больше abc . ч. д. н.

58 ЗАДАЧА. На концѣ линіи ab , поставитъ перпендикуляръ bd .

Рѣшен. На произвольно взятой отъ ф. 55 точки b линіе bc , сдѣлай равноспоронной треугольникъ bce (36). На продолженной ce опредѣли $eg = eb$; на послѣдокъ изъ b чрезъ точку g просяни bd , которая будетъ желаемой перпендикуляръ.

Доказ. Понеже уголъ $ceb = cbe$ (32), также уголъ $(ceb)cbe = cgb + ebg$ (53), уголъ $cgb = ebg$ (32), посему уголъ $ebg = \frac{1}{2}cbe$; но уголъ $cbe = 60$ град. (53), чего ради уголъ $ebg = 30$ град. и наконецъ уголъ $(cbe + ebg)abd = 90$ град. (ариф. 33); слѣдовательно bd перпендикулярна къ ad (21).

59. ЗАДАЧ. Начертить треугольникъ чтобы основаніе онаго было равно данной линіе ab , и при немъ углы равны даннымъ угламъ x и y , коихъ сумма меньше двухъ прямихъ угловъ.

Рѣшен. и Доказ. Данную линію ab ф. 56 возьми за основаніе, на которой сдѣлай уточки a уголъ $bac = x$, а у точки b уголъ $abc = y$ (45), коихъ продолженные бока взаимно пересѣкшися въ точкѣ c составятъ требуемой треугольникъ abc .

60. ЗАДАЧ. По данной высотѣ ac и дѣгоналѣ bc которая больше высоты, начертить прямоугольной треугольникъ.

Рѣшен. и доказ. На произвольно проведенной ф. 57 линіи ae изъ точки a поставь перпендикуляръ ac равенъ данной высотѣ ac (58). Изъ точки c разтвореніемъ дѣгонали bc опиши дугу, которая не опредѣленную ae пересѣчетъ въ точкѣ b . На концѣ соединя точки c и b прямою линіею bc , получишь требуемой треугольникъ.

61. ЗАДАЧ. По данной высотѣ ab , основанію ac и углу z , начертить треугольникъ.

Рѣшен. и Доказ. Взявъ линію ac за основаніе, у точки a сдѣлай уголъ $cad = z$ (45). Изъ точки a поставь перпендикуляръ ab равенъ данной высотѣ ab (58); потомъ изъ точки b проводи линію bd въ параллель основанію ac (52), которая пересѣчетъ бокъ угла cad въ точкѣ d ; на послѣдокъ соединя точки d и c прямою линіею cd , получишь требуемой треугольникъ adc , коего высота $de =$ данной ab (50). ф. 58

62. ТЕОРЕМ. Въ двухъ треугольникахъ abc и abd , имѣющихъ одно основаніе ab сумма двухъ боковъ $ac + bc$ одного треугольника, больше суммы боковъ $ad + bd$ Другаго.

Доказ. Продолжи ad , пока пересѣчется съ бокомъ bc въ точкѣ e , будетъ $ac + ce > ac (ad + de)$; также и $be + de > db$ (35), а придавъ сїи величины къ первымъ, будетъ $ac + (ce + be) bc + de > ad + de + db$ (ариф. 33); на концѣ опнявъ отъ $обѣ-$
Часть II В нхъ ф. 59

ихъ количествъ величину de , останется $ac + bc > ad + db$ (ариф. 34).

63. ТЕОРЕМ. Когда два бока ab и bc треугольника abc , равны двумъ бокамъ de и ef другаго треугольника def , и между равными боками уголъ b перваго, больше угла e втораго; то основаніе ac перваго, будетъ больше основанія df втораго.

Доказ. На бока ab (No 3) сдѣлай уголъ abg ф. 60 $= def$. Опредѣли $bg = ef$ или bc , проводи линіи gi и ag , которая будетъ $= df$ (30). При чемъ произойдетъ равнобедренный треугольникъ gbc : ибо $bg = ef = bc$ по положенію, чего ради уголъ $bcg = bgi$ (32). Къ углу bcg придай уголъ agb , будетъ $(bgc + agb) agc > bcg$; а по отнятіи отъ послѣдняго, угла acb , останется уголъ agc больше acg , по сему $ac > ag$ (36), слѣдовательно и больше df .

Но еслили кто скажетъ что при сдѣланіи показаннаго: *Первое*, точка g упадетъ на прямой линіи ac (No 1); то будетъ уголъ $abc > abg$, или больше e по положенію; по сему линія $ac > cg$ и больше df (ариф. 33). *Второе*, что точка g упадетъ внутрь треугольника abc (No 2): то будетъ $ac + bc > ag + bg$ (62), а по отнятіи равныхъ количествъ bc и bg , останется $ac > ag$ и больше df (ариф. 34).

64. ТЕОРЕМ. Во всякомъ четырехугольникѣ $abcd$, сумма внутреннихъ угловъ равна четыремъ прямымъ угламъ.

Доказ. Проведи діагональ ac , отъ чего ф. 27 произойдетъ два треугольника abc и acd , изъ коихъ сумма угловъ каждаго равна двумъ

двумъ прямымъ угламъ, слѣдовательно сумма всѣхъ угловъ чешвероугольника равна чешыремъ прямымъ угламъ или 360 град.

Слѣдс. I. Ежели три угла въ чешвероспоронникѣ прямые, то чешвертой непременно прямой, а когда два какіе нибудь изъ чешырехъ угловъ равны двумъ прямымъ угламъ, то прочіе также равны двумъ прямымъ.

Слѣдст. II. Ежели въ параллелограмѣ **ф. 24** одинъ уголъ b прямой, то и прочіе budú прямые: ибо уголъ b съ угломъ m равны двумъ прямымъ угламъ (48), но уголъ b прямой, слѣдспвенно и уголъ m прямой. Также уголъ b съ угломъ d равны двумъ прямымъ угламъ (48), по сему уголъ d равенъ прямому жѣ, и уголъ c по первому слѣдствію не премѣнно прямой.

65. ТЕОРЕМА. Во всякомъ многоугольниѣ $abcdef$ сумма внутреннихъ угловъ, равна произведенію числа боковъ безъ двухъ на два прямые угла.

Доказ. Раздѣли многоугольникъ $abcdef$ **ф. 61** произвольнымъ образомъ на треугольники линіями ae , eb и bd изъ одного угла въ другой проведенными, какъ въ фигурѣ значитъ. При чемъ произойдетъ число треуголь-

угольниковъ равно числу боковъ безъ двухъ; но сумма угловъ всякаго преугольника, равна двумъ прямымъ угламъ; того ради сумма всѣхъ угловъ оныхъ преугольниковъ (кои соспавляютъ сумму всѣхъ угловъ многоугольника) равна произведенію числа преугольниковъ или суммъ боковъ безъ двухъ, умноженныхъ на два прямые угла, то есть $6 - 2 = 4 \times 2 = 8$ прямымъ угламъ. ч. д. н.

66. ЗАДАЧА. Сыскать сумму градусовъ внутреннихъ угловъ фигуры *abcdef*.

Рѣшен. Число боковъ безъ двухъ умножь чрезъ 180 град. или два прямыхъ угла получишь пребуемое, то есть $6 - 2 = 4 \times 180 \text{ град.} = 720 \text{ град.} =$ числу градусовъ внутреннихъ угловъ фигуры *abcdef*.

67. ТЕОРЕМ. Во всякомъ многоугольникѣ сумма наружныхъ угловъ $cbg + dch + edi + kel + lfa + tab$, равна четыремъ прямымъ угламъ или 360 град.

Доказ. Понеже каждой внутренней уголъ *a, b, c, d, e, f*, со смѣжнымъ ему наружнымъ угломъ равны двумъ прямымъ угламъ (16); слѣдовательно сумма внутреннихъ и наружныхъ угловъ, равна двумъ прямымъ угламъ умноженнымъ на число боковъ фигуры, то есть

$6 \times 2 = 12$ прямымъ угламъ: но сумма внутреннихъ угловъ многоугольника, по предъ идущей теоремѣ равна двумъ прямымъ угламъ умноженнымъ на число боковъ безъ двухъ, то есть $6 - 2 = 4 \times 2 = 8$ прямымъ угламъ; которое вычтя изъ 12 оставшихъ 4 прямыхъ угла или 360 град. будетъ равенъ суммѣ на ружныхъ угловъ $cbg + dch + edi + kef + lfa + tab$.

68. ЗАДАЧА. Сискать сумму градусовъ на ружныхъ угловъ фигуры, у которой одинъ уголъ входящій.

Рѣшен. Къ чепыремъ прямымъ угламъ придай ф. 62. два прямыхъ угла, получишь требуемую сумму наружныхъ угловъ фигуры, то есть шесть прямыхъ угловъ или $6 \times 90 \text{ град.} = 540 \text{ град.}$

Доказ. Точки P и Q соединя прямою линіею PQ , произойдетъ многоугольникъ безъ входящаго угла, и сумма на ружныхъ угловъ a, b, c, d, e , такой фигуры, по предъидущей теоремѣ равна 4 прямымъ угламъ; но въ разсужденіи входящаго угла, слѣдуетъ къ чепыремъ прямымъ угламъ прибавить уголъ g, h , и i , коихъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ (53); слѣдовательно сумма наружныхъ угловъ многоугольника $a + b + c + g + i + h + d + e = 6$ прямымъ угламъ.

Слѣдст. Изъ того явствуетъ, что для сисканія суммы наружныхъ угловъ какого нибудь многоугольника со входящими углами, должно на всякой входящій уголъ къ чепыремъ прямымъ угламъ прибавать по два прямыхъ угла.

69. ЗАДАЧА. На данной линіе ab начертить квадратъ.

Рѣшен. Изъ точекъ a и b на линіе ab поставъ перпендикуляры ac и $bd = ab$ (58), точки c и d соединя прямою линіею cd будетъ фигура $abcd$ требуемой квадратъ.

Доказ. Понеже $ab = ac = bd$ и углы cab и abd прямые по рѣшенію, того ради cd параллельна ab (22), по сему всѣ бока равны (50) и углы прямые; слѣдовательно фигура $abcd$ есть квадратъ (27).

70. ЗАДАЧА. По основанію ab и высотѣ ad ; начертить прямоугольникъ.

Рѣшен. Взявъ линію ab за основаніе, ф. 63. изъ точекъ a и b поставъ перпендикуляры ad и bc равные высотѣ ad (58); наконецъ точки d и c , соединя прямою линіею cd будетъ требуемой прямоугольникъ.

Доказ. Понеже $ad = bc$ и перпендикуляры къ ab , по сему ab параллельна къ cd (22), также ad параллельна къ bc , и углы a, b, c, d прямые; слѣдовательно фигура $abcd$ есть прямоугольникъ (27).

71. ЗАДАЧА. На линіе ab по данному углу $у$, начертить наклоненной квадратъ (ромбъ).

Рѣшен.

Рѣшен. На линіѣ ab у почки a сдѣлай уголъ $bad = y$ (45), на сторонѣ котораго опредѣли линію $ad = ab$. Попомъ ф. 64 изъ почекъ d и b проводи dc и bc параллельно къ ab и ad (52), кои взаимно пересѣкшися въ почкѣ c , сдѣлаютъ требуемой ромбъ (50).

72. ЗАДАЧА. По двумъ линіямъ ad и bc и углу z начертить параллелограмъ.

Рѣшен. Взявъ линію ad за основаніе, ф. 65 сдѣлай у почки a уголъ bad равенъ данному z (45), опредѣли $ab = bc$. Изъ почекъ b и d проводи bg и dg въ параллель ad и ab (52), отъ чего произойдетъ требуемой параллелограмъ.

Доказ. Понеже $ad = lg$, $ab = dg$ (50), и уголъ $bad = bgd = z$, по сему уголъ $abg = adg$; слѣдовательно фигура $abgd$ есть параллелограмъ (27).

73. ЗАДАЧА. По тремъ даннымъ линіямъ ab , bc , cd и углу x начертить трапецію, чтобы bc была параллельна основанію ab .

Рѣшен. и Доказ. Взявъ линію ab за основаніе ф. 66 сдѣлай у почки b уголъ $abc = x$ (45), на сторонѣ котораго опредѣли $bc = cd$. Изъ почки c проводи cd въ параллель къ $ab = bc$, наконецъ почки a и d соедини прямою линіею ad , получишь требуемую трапецію.

74. ЗАДАЧА. Изъ четырехъ линій ab , bc , cd и de , начертить трапецію, что бы bc была параллельна основанію ab .

ф. 67 Рѣшен. Взявъ линію ab за основаніе, опредѣли на оной линію $aq = bc$, потомъ сдѣлай на bq преугольникъ qgb котораго бы бокъ bg былъ равенъ cd и бокъ $qg = de$ (37), изъ точекъ g и a проводи линіи gc и ac въ параллель къ ab и qg (52), кои пересѣкшися въ точкѣ c опредѣлятъ требуемую трапецію.

Доказ. $ab = ab$, $aq = cb$, $qg = de$ по положенію: но aq и cg также ac и gq между собою параллельны по рѣшенію, чего ради $aq = cg = bc$, $ac = qg = ed$; слѣдовательно трапеція $abgc$, имѣетъ бока равны даннымъ линіямъ.

Примѣч. Такимъ же образомъ начертится трапеція и по тремъ даннымъ линіямъ, съ тою только разностию, что на линіе qb равной разности двухъ линій кои имѣютъ бытъ параллельными между собою, должно сдѣлать равнобедренной преугольникъ lbg , котораго бы бока были равны данной третій линіе cd , а впрочемъ надлежитъ поступать по вышеписанному рѣшенію.

75. ЗАДАЧА. По даннымъ, высотѣ ab , углу α и двумъ линіямъ ad и bc , кои должны быть между собою параллельными начертить трапецію.

Рѣше-

Рѣшен. Сдѣлай основаніе ad — данной ad , у ф. 68
почки a сдѣлай уголъ $dab = z$, изъ точки a по-
ставь перпендикуляръ ag — данной высотѣ ab , по-
помѣ изъ точки g проводи неопредѣленную парал-
лельно къ ad , на которой опѣ точки b положи
 bc — данной bc , наконецъ точки c и d соедини пря-
мою линіею cd , получишь требуемую трапецію
имѣющую высоту равну данной ab .

О ЛИНІЯХЪ ПРОВЕДЕННЫХЪ,
И О МѢРѢ УГЛОВЪ ВЪ КРУГѢ.

76. ТЕОРЕМА. Если изъ центра c
круга $adlg$ на хорду ab опустится
перпендикуляръ ce , то оной какъ хор-
ду ab , такъ и дугу adb раздѣлитъ на
двѣ равныя части.

Доказ. Изъ центра c проведя линіи
 ac и bc , будетъ въ треугольникахъ aec ф. 69
и bec бокъ $ac = bc$ радіусы, ec общій
бокъ, и уголъ $aec = bec$ прямые, по сему
треугольникъ $aec = bec$ (34), и $ae = be$,
уголъ $acd = bcd$; того ради дуга $ad = bd$
(13), слѣдовательно хорда ab , и дуга
 adb , перпендикуляромъ cd раздѣлены на
двѣ равныя части.

Слѣдст. Изъ сего видно, что изъ по-
ловины хорды ab , чрезъ центръ c прове-
денная линія eg , къ хордѣ ab будетъ
перпендикулярна; ибо въ треугольни-
кахъ aec и bec , $ac = bc$, $ae = be$, ec
общій бокъ по сему и уголъ $bec = aec$
(37); слѣдовательно eg перпендику-
лярна къ ab .

77. ТЕОРЕМА. Если изъ середины хорды ab поставится перпендикуляръ ed , то оной пройдетъ чрезъ центръ круга acd .

Ф. 70 Доказ. Ибо всякая точка изъ составляющихъ перпендикулярную линію ed , какъ на примѣрѣ g , будетъ находится въ равномъ разстояніи спѣ точекъ a и b , потому что въ треугольникахъ age и bge , $ae = be$, eg общій бокъ и уголъ $age = bge$ прямые, по сему $ag = bg$; слѣдовательно нѣкая точка изъ составляющихъ перпендикулярную линію ed есть центръ круга (8). Есть лижъ положимъ, что центръ круга acd будетъ точка c : то проведя линіи ac и bc должна быть ac равна bc (8), но въ треугольникахъ aec и bec линія ec общая, бокъ $ae = be$, тупой уголъ aec больше остраго угла bec , того ради ac больше bc (63); и по тому точка c не есть центръ.

78. ТЕОРЕМА. Хорды ab и df , равно отстоящія отъ центра круга o , равны между собою.

Ф. 71 Доказ. Изъ центра o на хорды ab и df опуски перпендикуляры oc и oe , проведя oa и od будетъ $oe = oc$ по положенію, $od = oa$ радіусы, и уголъ $e = c$ прямые, по сему полхорды $de = ac$ (34); слѣдовательно $ab = df$.

Слѣдс-

Слѣдс. Равнымъ хордамъ ab и df , равныя дуги соотвѣствующиѣ. Поэтому что $ao = od$, $bo = of$ и $ab = df$, посему треугольникъ $dof = aob$ (33), и уголъ $dof = aob$, слѣдовашельно и дуга $ab =$ дугѣ df (13).

79. ТЕОРЕМ. Во всякомъ кругѣ $aefb$ изъ всѣхъ хордъ cd , ef и проч. ближайшая къ центру болѣе тѣхъ кои далѣе отъ онаго, и діаметръ ab больше всякой хорды.

Доказ. Ибо проведя oc , od , of , oe и проч. будетъ те, въ треугольникахъ cod и foe бока co , od , eo , fo равны, и уголъ cod одного, больше угла foe другого; слѣдовашельно хорда dc больше хорды ef (63). Зе діаметръ $ab = oc + od$, но $oc + od > cd$; слѣдственно и діаметръ ab больше хорды cd и проч. Ф. 72

80. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ $agbd$ центръ сыскать.

Рѣшен. Проведи произвольно хорду ab , раздѣли оную на двѣ равныя части (39) Ф. 69 чрезъ средину e хорды ab проведи перпендикулярную линію deg (40), которая бы концами касалась окружности круга; на послѣдокъ линію gd раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ c , которая будетъ искомой центръ.

Доказ.

Доказ. Перпендикулярная gd , изъ середины хорды проведенная, проходящѣ чрезъ центръ круга c (77), по сему она есть діаметръ, и точка c центръ круга (8).

81. ЗАДАЧА. Чрезъ три данныя точки a , b и c , лежащія не въ прямой линіе, или около даннаго треугольника abc описать кругъ.

Рѣшен. Данныя точки a , b , c соединя прямыми линіями ac и bc , раздѣли каждую на двѣ равныя части въ точкахъ d и e , чрезъ которыя проведи къ соединяющимъ данныя точки линіямъ, перпендикулярныя линіи dh и eh кои взаимно пересѣкшися въ точкѣ h , опредѣлятъ центръ; наконецъ изъ точки h , радіусомъ ha или bh опиши кругъ, котораго окружность пройдетъ чрезъ три данныя точки a , b , c .

Доказ. Проведя линіи hc , hb и ha , будетъ въ треугольникахъ bdh , cdh уголъ hdb равенъ hdc прямые, $db = cd$, и hd обоимъ треугольникамъ общій бокъ, чего ради $bh = ch$ (30); для подобной причины будетъ и $ch = ah$; по сему $ch = ah = bh$ суть радіусы круга изъ центра h описаннаго, коего окружность прошла чрезъ данныя точки a , b и c .

82. ЗАДАЧА. Данной дуги *асв* центръ сыскать.

Рѣшен. Проведи по изволенію двѣ хорды *ас* и *бс* раздѣли каждую на двѣ равныя части перпендикулярными линіями *dh* и *eh*, кои взаимно пересѣкшисъ въ точкѣ *h*, опредѣляяиъ искомой центрѣ. Справедливость сего докажется какъ и въ предъидущей задачѣ.

83. Опредѣлен. Тангенсъ или каса- ф.74
тельная линія *се* называется та, ко-
рая касается окружности круга, не про-
рѣзывая онаго.

84. ТЕОРЕМ. Когда на концѣ радіуса *ав* поставится перпендикуляръ *бс*, то оной коснется круга только въ одной точкѣ *в*.

Доказ. Понеже радіусъ *ав* есть перпендикуляръ къ *бс* и потому оной кратчайшее разстояніе отъ центра *а* до линіи *бс*, по сему всякая сей линіи точка, на примѣрѣ какъ *д* и проч. далѣе лежитъ отъ центра нежели *в*, того ради всѣ точки, кромѣ одной *в* суть внѣ круга; слѣдовательно линія *бс* касается окружности круга только въ одной точкѣ *в*.

Слѣдс. Ежели изъ центра *а*, въ касательную точку *в* проведется линія *ав*,
то

то оная будетъ перпендикулярна къ касательной bc . Ибо bc касается круга только въ одной почкѣ b , чего ради всякая оной почка должна находишься внѣ круга, и потому изъ центра a къ сей почкѣ b проведенная линія ab , будетъ болѣе нежели радіусъ ab ; по сему ab , есть кратчайшая между всѣми линіями кои можно протянушь отъ почки a къ касательной bc ; слѣдовательно линія ab перпендикулярна къ касательной bc (44).

85. **Опредѣленіе.** Секансъ (Сѣкущая) есть
 ф. 76 линія которая изъ точки лежащей внѣ круга, разрѣзываетъ оной на двѣ какія нибудь части, какъ dba , dgf , dhe . Наружная часть секанса, есть часть онаго находящаяся внѣ круга, какъ db , dg и dh ; а внутри круга находящаяся часть ba , gf и he , именуется внутреннею частью секанса.

86. **ТЕОРЕМА.** Ежели изъ точки d , взятой выше центра круга проведутся до вогнутой окружности линіи da , df и de , то будетъ самая большая изъ оныхъ линія da проходящая чрезъ центръ, также ближайшая къ центру болѣе тѣхъ кои далѣе отъ онаго.

Доказ. Изъ центра c протяни ce и cf ,
 ф. 75
 и 76
 будетъ ie , $ad = dc + (cf)ac > df$, также
 $ad = dc + (ca)ce > de$. 2 поелику въ
 пре-

треугольникахъ dcf и dce линия dc есть общая и бокъ $ce = cf$, а уголъ $dcf > dce$; слѣдовательно $df > de$ (63); пожѣ самое должно разумѣнь и о шѣхъ линіяхъ, кои проведены изъ точки d , лежащей внѣ круга, какъ изъ фигуры 76 видно.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что по обѣ стороны проходящей чрезъ центръ линіи ad , къ окружности круга $аев$, кромѣ двухъ равныхъ линій провести не можно; слѣдовательно ежели изъ одной точки проведутся къ окружности круга три равныя линіи, то оная точка будетъ центръ.

87. ТЕОРЕМА. Ежели изъ точки d , лежащей внѣ круга, проведутся до вылуклой окружности круга линіи db , dg , dh и dk ; то самая кратчайшая изъ сихъ линій будетъ та, которая будучи продолжена чрезъ центръ c пройдетъ.

Доказ. Ибо проведя изъ центра c радиусы cg , ch и ck , будетъ въ треуголь- ф. 76
никахъ deg , dch , dck линия $dc = bc +$
 $bd < gc + gd$ (35); но $gc = bc$, то оп-
нявъ оныя опъ первыхъ количествъ оста-
нется $bd < gd$ (ариф. 34); также bd
 $+ hc > gd + gc$ (62): но $cg = ch$ ра-
диусы, и такъ опнявъ оныя опъ обѣихъ
количествъ останется $dh > gd$ (ариф. 34);
такимъ

такимъ же образомъ докажется, что
и $dk > hd$.

Слѣдс. Изъ сего видно, что по обѣ
стороны крапчайшей линіи bd , не мож-
но провести кромѣ двухъ равныхъ пря-
мыхъ линій.

88. ТЕОРЕМА. Когда на продолжен-
номъ радіусѣ ae , возмется произволь-
ная линія eb за радіусъ и описется
кругъ, то оной коснется лѣваго въ
одной точкѣ e ; и обратно, когда два
круга касаются между собою въ одной
точкѣ, то радіусы ae и be проведенные
въ касательную точку составятъ пря-
мую линію ab .

Ф. 77 Доказ. Іе На концѣ радіуса ae поставъ
перпендикуляръ ce (58), которой коснетс-
я круга ef въ одной точкѣ e (84): но
какъ радіусы ae и be концами своими
сомкнулись въ одну точку e , чего ради
 ec касается и другаго круга въ той же
точкѣ e ; слѣдовательно оные круги ка-
саются между собою въ одной точкѣ e .
Зе ежели изъ центровъ a и b въ точку
касательную проведемъ радіусы ae и be
и проведемъ чрезъ оную точку касатель-
ная cd , то она какъ къ ae , такъ и
къ be будетъ перпендикулярна (84);
слѣдовательно ab будетъ линія прямая.

89. ТЕОРЕМА. Когда частію bd радіуса ad взятою внутри круга описется другой кругъ, то оной коснется первого въ одной точкѣ d .

Доказ. Ибо проведя линіи ac и bc будетъ $ab + bc > ac$ (35); но $ac = ab + bd$ радіусы, посему ф. 78 $ab + bc > ab + bd$, а отнявъ отъ обѣихъ величинъ линію ab останется $bc > bd$; слѣдовательно точка c далѣе лежитъ отъ центра b нежели точка d ; того ради всѣ точки окружности круга cde , кромѣ одной d въ круга dg , слѣдовательно окружность оного касается окружности круга edc только въ одной точкѣ d .

90. ТЕОРЕМА. Между параллельными хордами cd и ef , дуги ce и fd равны между собою.

Доказ. Изъ центра o на хорду cd или ef опуски перпендикуляръ op , которымъ ф. 72 дуги cpd и epf раздѣляясь на двѣ равныя части (76), чего ради будетъ дуга $cp = dp$ и дуга $ep = pf$; посему $cp - ep = dp - pf$ (ариф. 34), то есть $ce = df$.

91. ТЕОРЕМА. Уголъ bad коего верхъ a на окружности круга, измѣряется половиною дуги bd содержащейся между его боками, то есть половиною числа градусовъ, минутъ и проч. дуги bd .

Доказ. Положимъ те, что одинъ бокъ угла есть діаметръ ad : то проведя чрезъ ф. 79

Часть II

Г

центрѣ

центрѣ c линѣю lf въ параллель боку ab , углы bad и fed будутъ равны (48), но уголъ fed , коего верхъ въ центрѣ c мѣряется дугою $fd = ah$ (13 и 20), (ибо каждая изъ сихъ двухъ дугъ будетъ мѣрою прошиву положенныхъ угловъ) но $ah =$ дугѣ bf между параллельныхъ линѣй ba и fh (90), по сему дуга $fd = bf$; слѣдовательно мѣра угла bad или fed , равна дугѣ fd или bf , которая равна половинѣ дуги bd , содержащейся между боками угла bad .

2е Когда одинъ бокъ ab угла baf будетъ находится по одну, а другой бокъ af по другую сторону центра c : то изъ верха a проведя диаметръ ad , уголъ baf раздѣлится на двѣ части, изъ коихъ по первому случаю будетъ мѣра угла $bad = \frac{1}{2}$ дуги bd , а мѣра угла $daf = \frac{1}{2}$ дуги df , по сему мѣра сихъ частей, то есть угла $baf = \frac{1}{2}$ дуги $bd + \frac{1}{2} df = \frac{1}{2}$ дуги bf .

3е, Если ли оба бока угла fag , будутъ находится по одну сторону центра c : то проведя диаметръ ad , по первому случаю будетъ мѣрою угла dag половина дуги $dg = \frac{1}{2} df + \frac{1}{2} fg$: но уголъ fad измѣряется половиною дуги df , слѣдовательно уголъ fag измѣряется $\frac{1}{2}$ ю дуги fg (ариф. 34).

Слѣдств. Изъ того видно. Іе что углы
ф. 81 a и b , коихъ верхи на окружности,
стоя-

стоящіе на одной дугѣ df , равны между собою, и каждой изъ шаковыхъ угловъ равенъ половинѣ угла dsc , стоящаго на тойже дугѣ df , коего верьхъ въ центрѣ с. 2е, углы bad и bhd , коихъ верьхи при окружности стоящіе на діаметрѣ bd Ф. 82 суть прямые; ибо каждой изъ нихъ измѣряется половиною полуокружности круга, копорая $= 90$ град. 3е, уголъ fad , копорого мѣра дуга fd менѣе половины окружности, есть острый; и уголъ bag стоящій на дугѣ bfg , копорая болѣе половины окружности есть тупой, поелику половина сей дуги болѣе нежели 90 град.

92. ЗАДАЧА. Изъ точки b лежащей внѣ круга sc , проведи касательную къ кругу.

Рѣшен. Данную точку b , соедини съ центромъ круга a прямою линіею ab , Ф. 83 копорую раздѣля на двѣ равныя части въ точкѣ e , опиши кругъ $bcag$, коего окружность пересѣчется съ окружностью круга въ точкахъ c и g , чрезъ точки c и g проведи линіи bc и bg , изъ коихъ каждая будетъ касательная къ кругу sc .

Доказ. Ибо проведя ac и ag углы agb и acb , стоящіе на діаметрѣ ab будутъ прямые (91), по сему линіи bc и bg перпендикулярны къ радіусамъ ac и ag следовательно касательныя (84).

Слѣдств. Изъ чего видно, что касательныя bc и bg равны; ибо $ac = ag$ радіусы, уголъ $c = g$ прямые (91), и ab общій бокъ треугольникамъ abc и abg , слѣдовательно $bg = bc$ (34).

93. ТЕОРЕМА. Уголъ bag изъ касательной ag и хорды ab , измѣряется половиною дуги ab .

Доказ. Понеже линѣя da , чрезъ центръ ф. 79 c въ касательную точку a проведенная, перпендикулярна къ касательной ag (84), посему уголъ gad есть прямой (14); слѣдовательно оной измѣряется половиною полуокружности abd , или $\frac{1}{2}$ ю дуги $ab + \frac{1}{2}bd$; но уголъ bad измѣряется $\frac{1}{2}$ ю дуги bd , слѣдовательно мѣра угла bag есть $\frac{1}{2}$ дуги ab .

94. Определен. Сегментъ или отрѣзокъ круга afb или agb , есть пространство определенное частію окружности круга afb или agb и хордою ab .

95. ЗАДАЧА. На данной линѣе ab начертить отрѣзокъ круга, въ которомъ бы вписанной уголъ равенъ былъ данному z .

Рѣшен. У точки b сдѣлай уголъ abc равенъ данному z , попомъ на концѣ b линѣи bc , и изъ середины e линѣи ab , поставь перпендикуляры bd и ed (58.40).

ИЗЪ

Изъ точки d гдѣ перпендикулярныя пересѣклись, радіусомъ db опиши дугу bfa ; получишь желаемой опрѣзокъ круга afb ; въ копоромъ изъ произвольно взятой точки f , проведенными къ концамъ данной ab линіями af и bf , опредѣлился уголъ afb равенъ данному z .

Доказ. Понеже bc касается круга въ одной только точкѣ b порѣшенію, по сему уголъ abc измѣряется половиною дуги agb (93), также уголъ afb измѣряется половиною той же дуги agb (91), того ради уголъ $abc = afb$; но уголъ $abc =$ данному z ; слѣдовательно и уголъ $afb =$ углу z .

96. ТЕОРЕМА. Уголъ rab , изъ наружной части ra секанса rg и хорды ab , измѣряется половиною суммы двухъ дугъ ab и ag , или половиною дуги bag .

Доказ. Ибо смѣжные углы rab и bag ф. 80 вообще равны двумъ прямымъ угламъ, по сему оныя измѣряются половиною цѣлой окружности круга, то есть $\frac{1}{2}$ ю дуги $bdg + \frac{1}{2}$ bag , но уголъ bag измѣряется $\frac{1}{2}$ ю дуги bdg (91); слѣдовательно мѣра угла rab равна половинѣ дуги agb или $\frac{1}{2}$ дуги $ab + \frac{1}{2}$ ag .

97. ТЕОРЕМА. Уголъ bad , коего верхъ a внутри круга, измѣряется
Г з ло-

половиною дуги bd съ половиною дуги fg находящейся между продолженными его боками.

Доказ. Ибо проведя линію gh параллельно къ fd , будетъ уголъ $b\hat{a}d = b\hat{g}h$ (48), и мѣра угла $b\hat{g}h$ есть $\frac{1}{2}$ дуги $b\hat{d}h = \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}gh$: но дуга $dh =$ дугѣ fg (90) для параллельныхъ fd и gh : слѣдовательно мѣра угла $b\hat{a}d$ есть $\frac{1}{2}$ дуги $bd + \frac{1}{2}fg$.

98. ТЕОРЕМА. Уголъ dab , коего верьхъ а внѣ круга, измѣряется половиною дуги bd безъ половины дуги gf .

Доказ. Проведя gx параллельно къ da будетъ уголъ $dab = x\hat{g}b$ (48): но мѣра угла $x\hat{g}b$ равна $\frac{1}{2}$ дуги xb , дуга жъ $xb =$ дугѣ $db - dx$; но $dx = gf$ (90), по сему дуга $xb =$ дугѣ $db - gf$, слѣдовательно мѣра угла $x\hat{g}b$ или dab , есть $\frac{1}{2}$ дуги $xb = \frac{1}{2}$ дуги $db - \frac{1}{2}gf$ (ариф. 36).

Примѣчан. Ежели линія ad сдѣлается касательною ap , то мѣра угла rab будетъ равна половинѣ дуги $pxb - \frac{1}{2}pg$; ибо уголъ rgb измѣряется $\frac{1}{2}$ ю дуги pxb (91), а мѣра угла $apg = \frac{1}{2}$ дуги pg (93): но уголъ $rgb - apg =$ углу rab (53); слѣдовательно и половина дуги $pxb - \frac{1}{2}pg$ есть мѣра угла rab .

99. ТЕОРЕМА. Во всякомъ четсериуголь-
никѣ $abcd$ вписанномъ въ кругѣ, про-
тивуположащіе углы $adc + abc$, также
 $dab + dc b$ равны двумъ прямымъ
угламъ

Доказ. Мѣра угла $dab =$ половинѣ ду-
ги bcd , а мѣра угла $dc b = \frac{1}{2}$ дуги bad ф. 87.
(91): но $\frac{1}{2}$ дуги $dc b + \frac{1}{2} bad$ равна по-
ловинѣ окружности круга $= 180$ град. по
сему сумма угловъ $dab + dc b =$ двумъ
прямымъ угламъ. Такимъ же образомъ
докажется, что сумма угловъ $adc + abc$
равна двумъ прямымъ угламъ.

О ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ ЛИНІЯХЪ И ПОДОБСТВѢ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

100. Опредѣлен. Ежели изъ четырехъ
линій ab , cd , ge , ef первая содержится ф. 88
въ другой столько разъ, сколько третья
въ четвертой, то естъ $ab : cd = ge : ef$
то такіе линіи называются геометриче-
ски пропорціональны.

101. Опредѣлен. Когда изъ трехъ ли-
ній первая содержится во второй, сколь-
ко вторая въ третьей, на примѣръ, $ab :$
 $cd = cd : ge$; то сіи линіи находятся въ
непрерывной геометрической пропорціи, изъ
коихъ вторая cd именуется среднею про-
порціональною между первою ab и по-
слѣднею ge .

102. ЗАДАЧА. Данную линію *ab* раздѣлить на столько равныхъ частей, на сколько желаешь.

Рѣшен. Положимъ что должно данную ф. 89 *ab* раздѣлить на пять равныхъ частей, чего ради изъ точки *a* подъ какинъ нибудь угломъ проводи линію *ac*, на которой начиная отъ *a* положи произвольной величины пять равныхъ частей; потомъ конецъ данной линіи *b* и послѣднюю точку *d* линіи *ac*, соедини прямою линіею *bd*, и напослѣдокъ изъ точекъ замѣченныхъ *e*, *f*, *g*, и *h* проводи *ei*, *fk* и проч. вѣ параллель *bd*, при чемъ данная линія *ab* раздѣлится на пять равныхъ частей.

Доказ. Изъ точекъ *e*, *f*, *g*, *h*, проводя линіи *en*, *fo*, *gp* и *hq* вѣ параллель *ab* (52), будутъ треугольники *aei*, *efn* и проч. равны между собою. Ибо *ae* = *ef* и проч. по положенію, уголъ *eai* = *fen* = *gfo* и проч. также уголъ *aei* = *efn* = *fgo* и проч. (48); чего ради треугольники *aei*, *efn*, *fgo* и проч. равны между собою (31), и *ai* = *en* = *fo* и проч. но какъ *en* параллельна *ik* и *fo* параллельна *kl*, также *ei* параллельна *nk*, *kf* параллельна *lo* и проч. посему *en* = *ik* и *fo* = *kl* и проч. (50); чего ради и *ai* = *ik* = *kl* и проч. слѣдовательно *ab* раздѣлена на пять равныхъ частей.

Слѣдст.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, когда бокъ ad , какого нибудь треугольника abd , раздѣлился на нѣсколько равныхъ частей ae , ef и проч. и изъ почекъ e , f , g и проч. проведутся линіи въ параллель основанію ab : то бокъ bd сими линіями раздѣлился во столько жъ между собою равныхъ частей, сколько оныхъ бокъ ad имѣть будетъ.

103. Опреѣлен. Подобные треугольники называются тѣ, коихъ при угла одного, равны порознь прѣмъ угламъ другаго. Бока противулежащѣ равнымъ угламъ называются сходственными.

104. ТЕОРЕМА. Въ подобныхъ треугольникахъ abc и deh , сходственные бока $de : ab$, $eh : bc$, $dh : ac$ геометрически пропорціональны, то есть $de : ab = eh : bc = dh : ac$.

Доказ. Представъ себѣ, что треугольникъ deh положенъ на треугольникъ abc ф. 90. такъ, что бокъ de падаетъ на бокъ ab , но какъ уголъ $e = b$, то бокъ eh упадетъ на бокъ bc и бокъ dh упадетъ параллельно къ ac ; попому что уголъ $d = a$, и будетъ $bk = eh$, $dk = dh$. И такъ ежели вообразимъ себѣ, что бокъ ab имѣетъ въ себѣ семъ такихъ равныхъ частей, каковыхъ бокъ bd содержитъ въ себѣ

три части, и когда изъ точекъ коими боки ab раздѣлился на равныя части, проведенныя линіи параллельно къ ac и bc : то бока bk , bc , dk и ac раздѣляясь на столько жѣ между собою равныхъ частей, сколько боки bd и ab равныхъ частей имѣютъ; того для, будетъ ld : $ab = 3 : 7$, $bk : bc = 3 : 7$ и $dk : ac = 3 : 7$ (ариф. 214); слѣдовательно $bd : ab = bk : bc = dk : ac$ (ариф. 229), то есть $ae : ab = eh : bc = dh : ac$. ч. д. н.

Слѣдств. I. Изъ того жѣ слѣдуетъ, что высоты bo и bp подобныхъ треугольниковъ bdk и abc , содержащая какъ сходственные бока; ибо $db : ab = 3 : 7$, $dk : ag = 3 : 7$ также $bo : bp = 3 : 7$ поему $bo : bp = dk : ac$.

Слѣдств. II. Когда $bd : ab = bk : be$; то будетъ и $ab - bd : bd = bc - bk : bk$ (ариф. 228), то есть $ad : bd = ck : bk$, или $bd : ad = bk : kc$, также $ad : kc = bd : bk$ (ариф. 227).

Слѣдств. III. Изъ вышеписаннаго слѣдуетъ, что во всякомъ треугольникѣ, сколько бы ни было проведено линій въ параллель основанію, то части боковъ fg : ga и mn : nc находящіяся между параллельныхъ линій будутъ геометрически пропорціональны, то есть, $fg : ga = mn : nc$. Ибо $fg : ag = 2 : 3$, также $mn : nc = 2 : 3$; слѣдовательно и $fg : ga = mn : nc$ (ариф. 229).

105. ТЕОРЕМА. Когда въ треугольникахъ deh и abc . уголъ $e =$ углу b и бока $de : ab$ и $eh : bc$ составляющіе равные углы пропорціональны; то такіе треугольники будутъ подобны.

Доказ. Сдѣлай $bd = ed$, изъ точки d проводи линію dk параллельно къ ac , ф. 90
треугольники abc , dbk будутъ подобны (103); чего ради bd или $ed : ab = bk : bc$ (104), и $ed : ab = eh : bc$ по положенію, слѣдственно $bk : bc = eh : bc$, но $bc = bc$, того ради $bk = eh$. По сему треугольникъ bdk равенъ треугольнику edh (30). Треугольникъ же bdk подобенъ abc , слѣдовательно и треугольникъ edh подобенъ abc .

106. ТЕОРЕМА. Ежели всѣ бока треугольника edh пропорціональны бокамъ другаго треугольника abc , то есть, когда $ed : ab = eh : bc = dh : ac$, то такіе треугольники будутъ подобны.

Доказ. На бока ab треугольника abc , опредѣли $bd = ed$, изъ точки d проводи ф. 90
линію dk параллельно ac , будетъ треугольникъ bdk подобенъ abc (103); чего ради $bd : bk = ab : bc$ (104) $= ed : eh$ по положенію, по сему $bd : bk = ed : eh$, но $bd = ed$, слѣдовательно $bk = eh$; также $bd : dk = ab : ac$ (103) $= de : dh$ по положенію, по сему $bd : dk = de : dh$
(ариф.

(ариф. 218); но $bd = de$, того ради $dk = dh$, и треугольникъ $deh = dbk$ (33); треугольникъ же bdk подобенъ abc , следовательно и deh подобенъ треугольнику abc .

107. ЗАДАЧА. Къ двумъ даннымъ линіямъ A и C найти третью пропорціональную меньшую.

Рѣшен. Сдѣлай произвольной уголъ hej , отъ верьха e опредѣли линію ef равную данной большой C , отъ f линію fi равную меньшей A и $eg = A$, точки f и g соедини прямою линіею gf ; а изъ i проводи линію ih въ параллель gf , будетъ gh прешья пропорціональная.

Доказ. Понеже gf параллельна hi , того ради треугольникъ egf подобенъ eih , по сему $ef : fi = fg : gh$, то есть $C : A \doteq A : gh$ или $\div C : A : gh$ (104); следовательно gh есть требуемая линія.

108. ЗАДАЧА. Къ тремъ даннымъ линіямъ A , B , C найти четвертую пропорціональную большую.

Рѣшен. Сдѣлай произвольной уголъ hdg . Отъ верьха d опредѣли $de = A$, $eg = B$, $df = C$, потомъ точки e и f соедини прямою линіею ef , а изъ точки g проводи gh въ параллель ef , будетъ линія fh четвертая пропорціональная.

Доказ.

Доказ. Понеже ef параллельна линіе gh , по сему треугольникъ def подобенъ dgh , чего ради $de : eg = df : fh$ (104), то есть $A : B = C : fh$; слѣдовательно fh есть четвертая пропорціональная (100).

109. ЗАДАЧА. Къ даннымъ двумъ линіямъ A и B сыскать четвертую пропорціональную линію въ продолжающейся геометрической пропорціи.

Рѣшен. Сдѣлай по изволенію уголъ icf . Отъ верха онаго опредѣли cd равну большей данной линіе B , $cg = A$ и $de = A$, Ф. 93 изъ e просяни eh въ параллель gd , будетъ gh третья пропорціональная (107); потомъ сдѣлай $ef = gh$, проведи изъ f линію fi въ параллель he , будетъ линія hi требуемая.

Доказ. Въ треугольникѣ cfi линіи gd , he и if параллельны между собою по рѣшенію, чего ради $cd : (de)cg = cg : gh$, то есть, $B : A = A : gh$ (104); и такъ gh есть третья пропорціональная (101). Также $(de)cg : (ef)gh = gh : hi$ (104); чего ради $cd : cg = cg : gh = gh : hi$ по сему $\therefore cd : cg : gh : hi$ или $\therefore B : A : gh : ih$; слѣдовательно hi есть четвертая пропорціональная.

Примѣчан. Такимъ образомъ существуетъ пятая и болѣе пропорціональная линія не прерывной геометрической пропорціи.

II. ЗАДАЧА. Линію AB раздѣлить такъ въ пропорціональныя части, какъ другая cd раздѣлена въ точкахъ e и i .

Рѣшен. У почки c , раздѣленной линіи **ф. 94** cd , сдѣлай по соизволенію уголъ gcd . Отъ верха c , опредѣли линію $cg =$ данной AB , точки g и d соедини прямою линіею gd , потомъ изъ почекъ e и i проведи ef и ih въ параллель dg , при чемъ линія cg равная данной AB раздѣлился такъ въ пропорціональныя части, какъ раздѣлена cd .

Доказ. Ибо въ треугольникѣ cdg линіи ih , ef параллельны dg , того ради $ci : ch = ie : hf = ed : fg$; слѣдовательно части $ch : hf : fg$ линіи cg , которая равна данной AB имѣютъ такое жѣ содержаніе какое части $ci : ei : ed$ линіи cd .

III. ЗАДАЧА. Данную линію ab раздѣлить въ содержаніи чиселъ $3 : 5 : 2$.

Рѣшен. У почки a данной линіи ab , **ф. 95** сдѣлай по соизволенію уголъ bac . Отъ верха a на линіи ac положи произвольной величины равныхъ частей $3 = ae$, $5 = ed$, $2 = dc$; потомъ точки b и c соедини прямою линіею bc , изъ почекъ d и e проведи df и eg въ параллель bc , при чемъ линія ab раздѣлился въ требуемыя пропорціональныя части.

Доказ.

Дсказ. Понеже въ треугольникѣ abc линѣи eg и df параллельны bc , чего ради $ag : gf = ae : ed$ или $3 : 5$ и $gf : fb = ed : dc = 5 : 2$, посему $ag : gf : fb = 3 : 5 : 2$; слѣдовательно линѣя ab раздѣлена въ пребуемомъ содержаніи.

II2. ЗАДАЧА. Отъ данной линѣи ab отдѣлить $\frac{4}{7}$.

Рѣшеніе. У точки a сдѣлай произвольной величины уголъ bae . Отъ верьха a по линѣе ae положи семь равныхъ произвольной величины частей, точки b и e соедини прямою линѣею be , опсчитай отъ a до d 4 части $= ad$; потомъ изъ точки d проводи линѣю dc въ параллель be , копорая отъ линѣи ab отдѣлитъ линѣю $ac = \frac{4}{7} ab$. ф. 96

Доказ. Поелику dc параллельна be по рѣшенію, то будетъ $ad : ae = ac : ab$ (104), но $ad = \frac{4}{7} ae$; слѣдовательно и $ac = \frac{4}{7} ab$.

II3. ЗАДАЧА. Начертить маас-штабъ или размѣръ геометрической.

Рѣшен. На прямой линѣе возьми десять равныхъ частей, и разстояніе ab ф. 97 которое десять равныхъ частей занимаютъ, перенеси на линѣю ac сколько разъ можно; есть ли кто довольствоваться хочетъ въ размѣреніидесятыми частями ми

ми мѣры ab , по маас-шпabъ уже и сдѣланъ. Но ежели кто спараясь о точности, и сошенныхъ частей оставитъ не хочеть, потъ къ линіе ac , подъ какимъ нибудь угломъ, но способнѣе подъ прямымъ, поставитъ долженъ линію ad , и на оной взять по произволенію десять равныхъ частей ai , $a2$, $a3$, и проч. чрезъ каждую точку i , 2 , 3 , и прочая провести параллельныя линіи къ ac , и на послѣднюю df перенестъ десять такихъ же частей, на какія ab раздѣлена. Потомъ ежели проведешь линіи bs , it , $2v$, $3x$ и проч. даже до gd , то размѣръ или маас-шпabъ геометрической будетъ сдѣланъ. И ежели ab означать будетъ сажень геометрическую: то bi , 12 , 23 , и проч. будутъ означать футы, ig одинъ дюймъ $2h$ два дюйма, $3k$ три дюйма и такъ далѣе.

Доказ. Что bi , 12 , 23 и проч. означать будутъ футы то всякъ видѣть можетъ. А понеже ig , $2h$, $3k$ и проч. параллельны линіе se , то будетъ $be : bi = se : ig$, но $bi = \frac{1}{10} be$; слѣдовательно ig будетъ $= \frac{1}{10} se$. Равнымъ образомъ доказано будетъ что $2h$ два дюйма, $3k$ три и такъ далѣе. А ежели ab будетъ означать футъ; то bi , 12 , 23 и проч. будутъ дюймы, ig одна линія, $2h$ двѣ линіи, $3k$ три линіи и такъ далѣе.

Примѣч. I. Ежели случится дѣлать маас-шпabъ не по геометрической, но по какой ни есть другой

другой мѣрѣ, на пр. по Россійской употребительной: то на линіѣ ab надлежитъ положить семь, а на перпендикулярѣ ad двенадцать частей, для того что Россійская сажень раздѣляется на 7 футовъ, а футъ на 12 дюймовъ, поступая въ прочемъ по вышеписанному будетъ сдѣланъ маас-шпабъ Россійской мѣры. По сему должно разсуждать и о прочихъ мѣрахъ, смотря по раздѣленію оныхъ.

Примѣч. II. Что до употребленія помянутого маас-шпаба касается, то по оному вымѣриваются линіи, или бока данной прямолинейной фигуры, на примѣрѣ: когда на длежитъ данную линію вымѣрять по маас-шпабу, то смѣривъ величину оной циркулемъ положи разтвореніе его на маас-шпабѣ af такимъ образомъ, чтобъ одна нога циркула находилась на перпендикулярѣ rr , а другая на показанныхъ на маас-шпабѣ дюймахъ. Положимъ что разтвореніе циркула равно вымѣренной линіѣ ляжетъ отъ u до q , то считай сколько отъ u до q сажень футовъ и дюймовъ, а понеже линія uq представляетъ на маас-шпабѣ 3 сажени 4 фута и 6 дюймовъ, слѣдственно вымѣренная линія равна $3^0, 4', 6''$.

II4. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ дае линія bc параллельна основанію de извѣстны части $ab = 50'$, $bd = 20'$, $ac = 40'$, $bc = 60'$ сыскать часть ec и основаніе de .

Рѣшен. Поелику треугольникъ abc подобенъ ade , то будетъ содержаться ф. 98 ab къ ad какъ bc къ de (104), также содержится ab къ bd какъ ac къ ce .

Часть II

Д

Числами

Числами.

$$\begin{array}{rcl}
 50' + 20' = 70' = ab + bd = ad \\
 ab : ad = bc : de \quad \text{и} \quad ab : bd = ac : ce \\
 50' : 70' = 60' : 84' \quad \quad \quad 50' : 20' = 40' : 16' \\
 \begin{array}{r}
 60 \\
 \hline
 50 \overline{) 4200} (84' = de \\
 400 \\
 \hline
 200 \\
 200
 \end{array}
 \quad \quad \quad
 \begin{array}{r}
 40 \\
 \hline
 50 \overline{) 800} (16' = ce \\
 50 \\
 \hline
 300 \\
 300
 \end{array}
 \end{array}$$

II5. ЗАДАЧА. въ треугольникѣ *ade* линія *lc* параллельна основанію *de*, извѣстны $ad = 70'$, $lc = 60'$, $ce = 16'$, $de = 84'$ сыскать части *ab*, *bd* и *ac*.

Рѣшен. Для подобства треугольниковъ *abc* и *ade*, будетъ $de : bc = ad : ab$, то есть $84' : 60' = 70' : 50' = ab$, $ad - ab = bd = 70' - 20' = 50'$; потомъ $db : ab = ce : ac$, то есть

$$20' : 50' = 16' :$$

$$50$$

$$20 \overline{) 800} (40' = ac.$$

$$80$$

II6. ЗАДАЧА. Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ *abc* и *ade* извѣстны $ac = 40'$, $ce = 16'$, $ab = 50'$, $de = 84'$ сыскать *bd* и *bc*.

Рѣшен.

Рѣшен. Поелику треугольникъ abc подобенъ ade , поюго ради сдѣлай слѣдующую пропорцію, $ae : ac = de : bc$, также и $ac : ce = ab : bd$ (104), то есть

$$\begin{array}{r} 56' : 40' = 84' : bc \quad \text{и} \quad 40' : 16' = 50' : bd \\ \hline 84 \qquad \qquad \qquad 50 \\ 56)3360(60' = bc \quad 40)800(20' = bd \\ \hline 3360 \qquad \qquad \qquad 80 \end{array}$$

II7. ЗАДАЧА. Тралеціи $dvce$ извѣстны бока $de = 84'$, $bc = 60'$, $bd = 20'$, $ec = 16'$ сыскать дополненіи оной ab и ac .

Рѣшен. Изъ точки c проводи линію cf параллельно боку bd , продолжи db и ec пока пересѣкутся въ точкѣ a ; при чемъ будешъ $cf = bd$, $bc = df$ (50), по сему изъ de вычтя df останеся ef , и для подобія треугольниковъ efc и bca сдѣлай слѣдующую пропорцію, $ef : bc = ec : ac$, также $ef : bc = cf : ab$, то есть

$$84' - 60' = 24' = ae - df = ef.$$

$$\begin{array}{r} 24' : 60' = 16' : ac \quad \text{и} \quad 24' : 60' = 20' : ab \\ \hline 16 \qquad \qquad \qquad 20 \\ 24)960(40 = ac \quad 24)1200(50 = ab \\ \hline 96 \qquad \qquad \qquad 120 \end{array}$$

II8. ЗАДАЧА. Въ двухъ прямоугольныхъ треугольникахъ aed и bce , извѣстны перпендикуляры $bc = 60''$ и ad

$ad = 84''$ и сумма ихъ оснований $ae + be = ab = 120''$, сыскать be и ae .

Рѣшен. Проведи df параллельно къ ab
Ф. 99 пока пересѣчется съ продолженною cb въ
 точку f ; при чемъ будетъ $ad = bf$ и $ab = df$ (50), и для подобія треуголь-
 никовъ dcf и bec , будетъ $(cb + bf)cf : bc = df(ab) : be$, то есть, какъ сумма
 перпендикуляровъ $cb + ad$ содержится къ
 одному bc , такъ сумма оснований $ae + be$
 къ основанію be ; которое вычтя изъ ab ,
 получишь ae , какъ изъ слѣдующаго видно.

$$60'' + 84'' = 144'' = cb + (ad)bf = cf.$$

$$144'' : 60'' = 120'' : be.$$

120

$$144) 7200(50'' = be.$$

720

$$120'' - 50'' = 70'' = ab - be = ae.$$

справедливость вышеписанныхъ рѣшеній
 видна изъ § 104.

II9. ЗАДАЧА. Въ двухъ подобныхъ
 треугольникахъ abc и ade извѣстны,
 треугольника ade сумма боковъ $ad + de + ae = 210'$, и бока $ab = 50'$, $bc = 60'$,
 $ac = 40'$ треугольника abc ; сыскать бо-
 ка ad , ae , ed треугольника ade .

Рѣшен. Для подобства треугольниковъ
Ф. 98 abc и ade будетъ $ab + bc + ca : ad + de + ea$

$+ ea = bc : de$, то есть, какъ сумма боковъ треугольника abc содержится къ суммѣ боковъ треугольника dae , такъ основаніе bc къ основанію de . Попомѣ посылай $bc : de = ab : ad$, и наконецъ $bc : de = ac : ae$, какъ слѣдуетъ:

$$60' + 50' + 40' = 150' = bc + ab + ac.$$

$$150' : 210' = 60' : de. \quad 60' : 84' = 50' : ad.$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline 150 \end{array} : \begin{array}{r} 50 \\ \hline 12600 \end{array} (84' = de) \quad \begin{array}{r} 60 \\ \hline 4200 \end{array} (70' = ad)$$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ \hline 600 \end{array}$$

$$600$$

$$60' : 84' = 40' : ae$$

$$40$$

$$60 \overline{) 3360} (56' = ae$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$360$$

$$360$$

$$70' - 50' = 20' = ad - ab = db. \quad 56' - 40' = 16' = ae - ac = ce.$$

Доказ. Понеже $ab : ad = ac : ae = bc : de$ (104), чего ради $ab + ac + bc : ad + ae + de = bc : ed$ (ариф. 241); слѣдовательно пропорція справедлива. Истинна прочихъ пропорцій видна изъ доказательства предъидущихъ задачъ.

120. ТЕОРЕМА. Во всякомъ треугольникѣ abc , когда уголъ b раздѣлится

Д 3 линіею

линіею be по поламъ, то будетъ $bc : ab = ec : ae$, также $bc + ab : ac = bc : ec = ab : ae$.

Доказ. Продолжа bc , опредѣли $bd = ab$,
 ф.100 почки a и d соедини прямою линіею ad ,
 будетъ уголъ $bad = adb$ (32), уголъ
 $abc = bad + adb$ (53), по сему ($\frac{1}{2}$ угла
 abc) $ebc = adb$; чего ради линія ad парал-
 лельна be (49), и уголъ $ceb = cad$ (48),
 по сему преугольники ecb и acd имѣющіе
 общій уголъ c между собою подобны
 (103), и потому $bc : (bd) ab = ec : ae$
 (104); также cd или $bc + (bd) ab : ac$
 $= bc : ec = (bd) ab : ae$. ч. д. н.

Слѣдст. Изъ того явствуетъ, когда
 ф.101 въ прямоугольномъ треугольникѣ acb ос-
 трой уголъ c раздѣлился въ нѣсколько
 равныхъ частей, и проведутся линіи cd ,
 ce и проч. то отрѣзки ad , de , eb основа-
 нія ab , отъ прямого угла a увеличиваю-
 тся. Ибо по предъидущей теоремѣ въ пре-
 угольникѣ ace будетъ $ac : ce = ad : de$; но
 $ce > ac$, поелику уголъ a прямой, а
 уголъ aec острый (56), слѣдственно и de
 больше ad (ариф. 202). Также въ пре-
 угольникѣ dcb будетъ $cd : bc = de : eb$,
 но $bc > cd$, потому что уголъ bdc боль-
 ше угла dbc , чего ради $be > de$; слѣдо-
 вательно $be > de > ad$.

121. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ abc ,
 уголъ abc линіею be раздѣленъ на двѣ
 равныя

равныя части, известна сумма боковъ $ab + bc = 144'$ и части основанія $ae = 50'$ и $ec = 70'$ сыскать бока ab и bc .

Рѣшен Сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ основаніе ac содержится къ отрѣзку ec , такъ сумма боковъ $ab + bc$ къ боку bc , каторой вычпи изъ найденнаго количества получишь боку ab , то есть ф.100

$$50' + 70' = 120' = ae + ec = ac$$

$$120' : 70' = 144' : bc \quad 144 - 84 = 60' = ab$$

$$\begin{array}{r} 120 \quad 70 \\ \hline 120 \quad 10080 \quad 84' = bc \end{array}$$

$$960$$

$$480$$

$$480$$

Доказательство смотри въ (5.120).

122. ТЕОРЕМА. Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc , когда изъ прямаго угла b на діагональ ac опустится перпендикуляръ bt : то оной будетъ средняя пропорціональная между отрѣзковъ, at и tc , и каждой боку ab и bc изъ составляющихъ прямой уголъ b есть средняя пропорціональная между діагональю ac исходственнымъ отрѣзкомъ.

Доказ. Ибо уголъ $mbc + mcb = 90$ град. и уголъ $abt + mbc = 90$ град. (53), ф.102

Д 4

по

по сему уголъ $tsb = abt$, (ариф. § 34), и уголъ $atb = bts$ прямые, чего ради и уголъ $tav = tbs$ (53); слѣдовательно треугольникъ atb подобенъ tbs . Также треугольникъ atb подобенъ abc , поелику уголъ a общій, уголъ $atb = abc$ прямые, и уголъ $abt = acb$ (53). Треугольникъ abc подобенъ bts ; ибо уголъ $bts = acb$ прямые, уголъ $tbs = cab$, и уголъ c есть общій; чего ради будетъ ie изъ подобныхъ треугольниковъ atb и tbs , $at : bt = bt : ts$, то есть $\therefore at : bt : ts$. 2е для подобныхъ треугольниковъ atb и abc , $at : ab = ab : ac$, то есть $\therefore at : ab : ac$. 3е для треугольниковъ abc и bts , $ts : bc = bc : ac$, то есть $\therefore ts : bc : ac$, слѣдовательно показанныя линіи суть пропорціональны. (101).

123. Опрѣленіе. Вписанная въ кругъ фигура есть та, которой всѣ верьхи угловъ фигуры находящся на окружности круга. Описанная около круга фигура есть та, которой бока касающся окружности круга.

124. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ def начертить треугольникъ подобенъ данному abc .

Рѣшеніе. Проведи въ данномъ кругѣ проф. 103 извольнo хорду ed , сдѣлай уголъ $def =$ углу abc (45), протяни df , попомъ сдѣлай уголъ $fdg = cab$ на конецъ точки

g и f соединя прямою линією gf , преугольникъ $dgsf$ будетъ желаемой.

Доказ. Ибо уголъ $cab = fdg$, и уголъ $abc = def$ по рѣшенію $= dgsf$ (91); по сему и уголъ $acb = dfg$ (53), слѣдовательно преугольникъ abc подобенъ $dgsf$ (103).

125. ЗАДАЧА. Около даннаго круга kgi . начертить преугольникъ подобенъ данному abc .

Рѣшен. Основаніе преугольника abc продолжи въ обѣ стороны до m и d . Сы- ф.
щи центръ круга e (80), проводи раді- 104.
усъ eg , сдѣлай уголъ $gei = dcb$, уголъ $gel = mab$ (45); потомъ чрезъ точки g , i и l проводи линіи fh , kh и kf перпендикулярно къ радіусамъ eg , ei , el (58), кои взаимно пересѣкшисъ въ точкахъ f , h и k опредѣлятъ желаемой преугольникъ fkh .

Доказ. Въ четвероугольникъ $geih$ углы i и g прямые по рѣшенію, по сему уголъ $gei + ghi =$ двумъ прямымъ угламъ или 180 град. (64); также уголъ $dcb + acb =$ 180 град. (16), чего ради уголъ $gei + ghi = dcb + acb$: но уголъ $gei = dcb$ по положенію; слѣдовательно уголъ $ghi = acb$. Подобнымъ образомъ докажется, что уголъ $gfi =$ углу cab и уголъ $fkh =$ углу abc .

О ПЛАНИМѢТРІИ или ИЗМѢРЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ.

126. Опредѣленіе. Планиметрѣя есть часть геометріи, кошорая учитъ измѣрять повѣрхности разныхъ геометрическихъ фигуръ.

127. ТЕОРЕМА. Всякой параллелограмъ $abcd$ діогональю ac , дѣлится на двѣ равныя части.

Но 1. Доказ. Треугольникъ $abc = adc$ по то-
ф. 23 му, что $ab = dc$, $ad = bc$ (27), и ac обо-
имъ треугольникамъ общая (33); слѣдствен-
но параллелограмъ $abcd$ діогональю ac раз-
дѣленъ на двѣ равныя части.

128. ТЕОРЕМА. Во всякомъ паралле-
лограмѣ діогональ одна другую дѣлитъ
на двѣ равныя части.

Но 1. Доказ. Понеже $ab = dc$ по положенію,
ф. 105 уголъ $bae = ecd$ и уголъ $abe = edc$ (48),
чего ради треугольникъ $abe = dec$ (31),
по сему $be = de$ и $ae = ec$; слѣдственно діо-
гонали ac и db одна другою еѣ точкѣ e
раздѣлились на двѣ равныя части.

129. ТЕОРЕМА. Параллелограммы $acbd$
и $bcdf$, имѣющіе одно основаніе bc и
равныхъ высотъ, или заключающіеся
между параллельныхъ линій bc и af
равны между собою.

Доказ.

Доказ. Въ треугольникахъ abe и cdf , боки $ab = dc$, $be = cf$ (27), и $ae = df$; ф. 106. ибо $(ad)bc = ef$, а придавъ къ симъ общую линію de будетъ $(ad + de)ae = (dc + ef)df$; посему треугольникъ $abe = cdf$ (33); отъ коихъ отнявъ общій треугольникъ die , останется трапеція $cief$ равна трапеціи $badi$, наконецъ придавъ къ симъ треугольникъ bci , будетъ параллелограмъ $befc$ равенъ параллелограму $abdc$.

Слѣдст. I. Изъ чего видно, что треугольникъ bef , имѣющій съ параллелограмомъ bd одно основаніе bc и равную высоту fg , равенъ половинѣ параллелограма $abcd$.

Слѣдст. II. Того ради треугольники abc и bef равныхъ основаній и высотъ, равны между собою; поелику каждой равенъ половинѣ параллелограма $abcd$ и $befe$ кои равны между собою.

130. ТЕОРЕМА. Треугольникъ abc равенъ параллелограму af имѣющему одно основаніе ab , а высоту gd , равную половинѣ высоты gc треугольника abc .

Доказ. Понеже треугольникъ abc равенъ половинѣ параллелограма ah (129): ф. 107. но какъ $ab = ef$ и $gd = dc$ по положенію, 107. чего ради параллелограмъ af равенъ параллело-

делограму eh (129), и равенъ половинѣ параллелограма ah ; слѣдовательно равенъ треугольнику abc .

131. ТЕОРЕМА. Треугольникъ abc равенъ параллелограму af , имѣющему высоту равну общей высотѣ ce , а основаніе ad , равно половинѣ основанія ab треугольника abc .

Доказ. Треугольникъ abc равенъ половинѣ параллелограма $abgh$ (129); но какъ $ad = bd$ и высота ce въ разсужденіи параллельныхъ линій общая, по сему параллелограмъ $af = dg$ (129), и каждой равенъ половинѣ параллелограма $abgh$; слѣдовательно параллелограмъ af равенъ треугольнику abc .

132. Опредѣлен. Для измѣренія плоскостей берется квадрапная плоскость опредѣленной величины за единицу, какъ по квадрапная сажень, квадрапной футъ и проч.

Примѣчан. Квадратная сажень есть квадрапъ, котораго бока по сажени. Квадратной футъ есть квадрапъ, котораго бока по футу и такъ далѣе.

133. ТЕОРЕМА. Плоскость прямоугольника $abcd$, равна произведенію основанія ac на высоту ab .

Доказ.

Доказ. Положимъ, что основаніе ac имѣетъ пять, а высота ab три фута. ф. 109
Раздѣля основаніе ac на пять, а высоту ab на три равныя части (102), изъ точекъ раздѣленной ac , проводи параллельныя къ ab , также изъ точекъ раздѣленной ab , проводи fh и eg параллельно къ ac ; при чемъ произойдутъ три равныя прямоугольника ah , fg и ed (129), изъ которыхъ въ каждомъ будетъ пять квадратовъ фута, равныхъ квадрату atg , каковыхъ въ трехъ равныхъ параллелограммахъ будетъ пятнадцать; то жъ самое произойдетъ и отъ умноженія основанія ac на высоту ab , то есть $ac \times ab$ или $5' \times 3' = 15''$ квадратнымъ футамъ, составляющимъ плоскость параллелограмма $abcd$.

Слѣдств. I. Понеже квадратъ ad есть такой прямоугольникъ, котораго бока ac ф. 110 и ab равны, чего ради плоскость онаго равна произведенію бока ac или ab , самаго на себя умноженнаго, то есть $ac \times ab = ac \times ac^*)$

Слѣдств. II. Того ради плоскость всякаго параллелограмма ag равна произведенію ф. 111 высоты gh на основаніе ab умноженной; по

*) И такъ площадь квадрата означать будемъ чрезъ ac^2 , при чемъ надлежитъ выговаривать, квадратъ иль линіи ac .

то есть $= gh \times ab$. Ибо прямоугольникъ $d c f e$ равенъ параллелограму ag , имѣющему основаніе $dc = ab$ и общую высоту gh (129). *)

Ф.
106

Слѣдст. III. Изъ того жъ явствуетъ, что плоскость всякаго преугольника $b c f$ равна произведенію основанія bc , на половину высоты fg , или равна произведенію высоты чрезъ половину основанія; и равна также половинѣ произведенія высоты основаніемъ умноженнаго. Ибо преугольникъ $b c f$ равенъ половинѣ параллелограма $b f$, имѣющаго одно основаніе bc и одну высоту fg (129. 130. 131). **)

Слѣдст. IV. Понеже квадратная сажень имѣетъ въ основаніи и высоту своей по 7 ми обыкновенныхъ футъ, того ради она будетъ имѣть семью семь квадратныхъ футъ, то есть 49''; также квадратнаго фута основаніе и высота имѣютъ по 12 дюймовъ, по сему площадь онаго будетъ имѣть двенадцатью двенадцатью квадратныхъ дюймовъ, то есть 144 квадр. дюйм. слѣдовательно геометрическая (деся-

*) При означеніи площади параллелограма чрезъ $gh \times ab$, принимается одна величина за основаніе а другая за высоту, и выговаривается, параллелограмъ изъ линій gh и ab .

**) При площади преугольника означающейся чрезъ $\frac{1}{2} gf \times bc$ тожъ должно разумѣть что сказано о параллелограмѣ.

эллиптическая) квадратная сажень будетъ имѣть 100 квадратныхъ футовъ, а футовъ 100 квадратныхъ дюймовъ и такъ далѣе.

Слѣдств. V. Изъ предъидущей теоремы и слѣдствіевъ видно, когда линейныя сажени умножаются линейными саженьми, то въ произведеніи будутъ квадратныя сажени; а ежели линейныя футы умножаются линейными футами, въ произведеніи будутъ квадратныя футы, и такъ далѣе. И обратно, еслили площадь какой нибудь фигуры опредѣленная извѣстнымъ количествомъ квадратной мѣры, раздѣлившись на линейную мѣру, въ частномъ числѣ будетъ линейная жъ или простая мѣра.

134. ЗАДАЧА. По извѣстному боку $ab = 15^\circ$ квадрата ad , сыскать онаго площадь.

Рѣшен. Бокъ ab умножь самого на **Но 1.** себя получишь желаемую площадь квадрата (133), то есть $15^\circ \times 15^\circ = 225^\circ$ квадратныхъ сажень, есть площадь квадрата ad . **ф. 25.**

Слѣдств. Изъ чего видно, когда будетъ площадь квадрата ad извѣстна: то онаго бокъ ab , будетъ равенъ квадратному корню изъ площади квадрата ad . На пр. когда площадь квадрата $ad = 225^\circ$, то $\sqrt{225^\circ} = 15^\circ$ есть бокъ ab квадрата ad .

Примѣч.

Примѣчаніе. Если ли бокъ квадрата ab данъ будетъ въ сажняхъ и фузахъ, то прежде всего должно привесити все оное въ футы, потомъ умножишь квадратно, получишь площадь квадрата въ квадратныхъ фузахъ, изъ коихъ выключя квадратныя сажени (133), будешь имѣть желаемую площадь квадрата. И обратно когда дана будетъ площадь квадрата въ сажняхъ и фузахъ квадратныхъ, то должно оныя привести въ квадратные футы; потомъ наймешь квадратной корень, получишь желаемой бокъ ab квадрата ad въ фузахъ; изъ коихъ выключя сажени, сыщется требуемой бокъ ab въ сажняхъ.

135. ЗАДАЧА. По даннымъ, основанію $ad = 32^\circ$ и высотѣ $cg = 13^\circ, 4'$ Российской мѣры, сыскать площадь параллелограма ac .

Рѣшен. Основаніе ad равно и высотѣ cg приведи въ футы, потомъ умножь основаніе на высотѣ, будетъ площадь параллелограма ac состоящая изъ квадратныхъ футовъ; на конецъ приведи оныя въ квадратныя сажени, получишь требуемую площадь, то есть

$$\begin{array}{r}
 13^\circ + 4' \\
 7 \\
 \hline
 91 \quad 32^\circ \\
 4 \quad 7 \\
 \hline
 95 = cg \quad 224 = ad
 \end{array}$$

$$224 = ad$$

$$\begin{array}{r}
 224' = ad \\
 \underline{95} \\
 1120 \\
 2016 \\
 \hline
 49) 21280 \quad (434^\circ, 14' \text{ квадрат.} = \\
 \underline{196} \quad ad \times cg = \text{площади парал-} \\
 \underline{168} \quad \text{лелограмма } ac \\
 \underline{147} \\
 210 \\
 \underline{106} \\
 14'
 \end{array}$$

136. ЗАДАЧА. По данной площади параллелограмма $abcd = 5280^\circ$ и основанію $ad = 80^\circ$, сыскать онаго высоту cg .

Рѣшен. Площадь параллелограмма $abcd$, раздѣли на основаніе ad , получишь требуемую высоту cg , то есть

$$\begin{array}{r}
 80) 5280 \quad (41^\circ = \text{высотѣ } cg. \\
 \underline{320} \\
 80 \\
 80
 \end{array}$$

137. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ acd , известна высота $ct = 60^\circ. 4'$ и основаніе $ad = 140^\circ. 2'. 4''$ французской мѣры, сыскать площадь онаго.

Рѣшен. Приведя мѣру высоты ct и ф. 27 основанія ad въ дюймы, умножь высоту и 28

на половину основанія, или основаніе на половину высоты, произшедшее отъ того произведеніе, то есть квадрашныя дюмы, приведи въ шаазы, футы и проч. получишь пребуемую площадь треугольника acd ; то есть

$$ct = 60^{\circ} + 4'$$

$$\begin{array}{r} 6' \\ \hline 360' \\ 4' \\ \hline 364' \\ 12'' \\ \hline 728 \\ 364 \\ \hline 4368'' \\ \hline 2 \end{array}$$

$$6 \times 6 = 36 \text{ квадрашн. фут.}$$

$$\times 144 \text{ въ шаазѣ.}$$

$$\hline 144$$

$$144$$

$$36$$

$$\hline 5184 \text{ квадр. д. въ ша- азѣ.}$$

$$ad = 140^{\circ} + 2' + 4''$$

$$\begin{array}{r} 6' \\ \hline 840' \\ 2' \\ \hline 842' \\ 12'' \\ \hline 1684 \\ 842 \\ \hline 10104'' \\ 4'' \end{array}$$

$$\hline 10108'' = ad$$

$$2184''$$

$$\hline 40432$$

$$80864$$

$$10108$$

$$\hline 20216$$

$$22075872'' \text{ квадр. дюй.}$$

$$= \text{площади треуголь-}$$

$$\text{ника } adc.$$

$$5184)22075872(4258^{\circ}.16''.96^{iv} \text{ квадрашныхъ}$$

$$= \frac{1}{2} ct \times ad = \text{площади треугольника } acd.$$

138. ЗАДАЧА. По известной площади треугольника $acd = 3780^\circ$ и основанію $ad = 180^\circ$ десятичной мѣры, сыскать высоту cm .

Рѣшен. Данную площадь треугольника acd , раздѣли на половину основанія ad , получишь пребуемую высоту cm , то есть

$$\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ = \frac{1}{2} ad$$

90) $3780(42^\circ = \text{высотѣ } cm.$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \hline 180 \\ 180 \end{array}$$

Прибавленіе. Равнымѣ образомѣ по известной площади и высотѣ cm , сыщется основаніе ad треугольника acd , когда площадь онаго раздѣлится на половину высоты cm .

139. ТЕОРЕМА. Площади параллелограмовѣ df и ag , имѣющихъ одинакую высоту gh , или заключающихся между параллельныхъ линій eg и dh содержатся между собою какъ ихъ основанія dc и ab .

Доказ. Понеже площадь прямоугольника $df = dc \times cf$. Площадь параллело- Но 4
грама $ag = ab \times (gh)cf$ (133), чего ради ф. III
будетѣ $dc \times cf : ab \times (gh)cf = dc : ab$.
Ибо произведеніе крайнихъ $ab \times dc \times cf =$
произведенію среднихъ $ab \times dc \times cf$
(ариф. 222); слѣдовательно пропорція по
(§ 225. ариф.) справедлива. Слѣдс.

Слѣдств. Площади преугольниковъ dcf и abg , имѣющихъ одну высоту $cf = lg$, содержащаяся какъ ихъ основанія dc и ab . Ибо по предвѣдущей теоремѣ $dc \times cf : ab \times gh = dc : ab$, чего ради $\frac{1}{2}dc \times cf : \frac{1}{2}ab \times gh = dc : ab$ (ариф. 239); но $\frac{1}{2}dc \times cf =$ площади треугольника dcf , также $\frac{1}{2}ab \times gh =$ площади треугольника abg (133); слѣдовательно площадь треугольника dcf содержица къ площади треугольника $abg = dc : ab$.

140. ТЕОРЕМА. Площади параллелограмовъ A и B находятся въ сложномъ содержаніи ихъ основаній и высотъ, или содержатся между собою какъ произведенія ихъ основаній чрезъ высоты.

Доказ. Ибо площадь перваго $A = ar \times cd$, втораго $B = fr \times hi$ (133), того ради будетъ $A : B = ar \times cd : fr \times hi$, но содержаніе $ar \times cd$ къ $fr \times hi$ суть произведенія изъ содержаній $cd : hi$ и $ar : fr$, по сему содержаніе $A : B$ есть сложное изъ содержаній основанія къ основанію, и высоты къ высотѣ (ариф. § 252), слѣдовательно параллелограммы A и B находятся въ сложномъ содержаніи ихъ основаній и высотъ, или содержащаяся между собою какъ произведенія основаній чрезъ высоты.

Слѣдств. 1. Изъ того явствуетъ, что площади треугольниковъ cad и hfi въ сложномъ содержаніи ихъ высотъ и основаній; ибо треугольники cad и hfi суть половины параллелограмовъ, имѣющихъ одно основаніе и одну высоту: но половины содержатся какъ ихъ цѣлыя, слѣдовательно $\frac{1}{2}A : \frac{1}{2}B = ar \times cd : fr \times hi$ (ариф. 237).

Слѣдств.

Слѣдств. II. Площади параллелограмовъ $dcfe$ и abg будутъ равны, когда основаніе dc къ основанію $ф. III$ ab находится въ обратномъ содержаніи высотъ gh къ cf ; ибо ежели $dc : ab = gh : cf$, то будетъ $cf \times dc = ab \times gh$, то есть площадь параллелограмма $dcfe =$ площади параллелограмма abg .

141. Опрѣдѣл. Ежели въ параллелограмѣ $abcd$, чрезъ произвольно взятую на діагональ точку f $ф. II3$ проведемъ линіи kg и eh , параллельно бокамъ bd и ab ; то произшедшіе отъ того параллелограммы bf и cf , называющіяся *дополненіи параллелограмовъ* af и fd къ цѣлому ad .

142. ТЕОРЕМА. Дополненіи bf и cf параллелограмовъ fd и af къ цѣлому ad , равны между собою.

Доказ. Треугольникъ $abd = acd$, и треугольникъ $afk = ahf$, также треугольникъ $fed = gdf$ (33); по сему $afk + fed = ahf + gdf$, которые вычтя изъ равныхъ треугольниковъ abd и acd останешся, параллелограмъ fb равенъ параллелограму cf (ариф. 34).

143. ТЕОРЕМА. Ежели прямая линія ab раздѣлится на двѣ какія нибудь части ac и bc ; то квадратъ изъ цѣлой ab равенъ суммѣ квадратовъ изъ неравныхъ частей ac и bc и двумъ прямоугольникамъ изъ тѣхъ же частей ac и bc .

Доказ. Сдѣлай на ab квадратъ $abgi$ (69), про- $ф. II4$ веи изъ точки c линію cm параллельно bg и діагональ bi , чрезъ точку f общаго сѣченія линію eh параллельно ab , будетъ уголъ $aib = abi$ (32) $= hfi$ (48); по сему $hf = hi$ (55) $= im = fm$ (50): уголъ же

же $mih = ihf = hfm = fmi$ прямые; шого ради
 фигура hfm есть квадратъ \overline{ac}^2 (133), для подо-
 бной причины и фигура $bcef$ есть квадратъ \overline{bc}^2 :
 но $cf = ef$ и $hf = fm$ (27), посему прямоугольникъ
 hc равенъ прямоугольнику me ; слѣдовательно $\overline{ab}^2 =$
 $\overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 + 2ac \times bc$.

144. ТЕОРЕМА. Въ прямоугольномъ
 треугольникѣ abc , квадратъ діогонали
 ac равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ
 боковъ ab и bc , то есть $\overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ab}^2$.

Ф. 115 Даказ. Изъ прямого угла b на діого-
 наль ac опусти перпендикуляръ bm , при
 чемъ произойдутъ преугольники abt и bmc
 подобны треугольнику abc (122); чего
 ради $am : ab = ab : ac$ или hm . Также
 $mc : bc = bc : ac$ или hm , при чемъ $am \times$
 $hm = \overline{ab}^2$, и $mc \times hm = \overline{bc}^2$ (ариф. 223); но
 $am \times hm =$ площади прямоугольника fm ,
 также $mc \times hm =$ площади прямоуголь-
 ника hc (133). Посложеніи коихъ будетъ
 $fm + hc = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$, то есть $\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$.

Другимъ образомъ. Проведя изъ точки
 b линѣи bf и bg , а изъ точекъ a и c линѣи
 ak и ce , будетъ треугольникъ $ace = abf$.
 Ибо боки $ab = ae$ и $ac = af$ (27), уголъ
 $eac = baf$, пошому что уголъ $eab = caf$
 прямые, а придавъ къ симъ общій bac
 будетъ $(eab + bac) eac = (caf + bac) baf$;
 слѣд.

Слѣдовательно треугольникъ $aec = abf$ (30): но треугольникъ aec съ квадратомъ $abde$ имѣютъ одно основаніе ae и между параллельныхъ линій ae и dc ; также треугольникъ abf съ параллелограмомъ $amhf$ имѣютъ одно основаніе af и между параллельныхъ линій af и bh ;

пого ради треугольникъ $aec = \frac{1}{2}ab$ и треугольникъ $(abf)aec = \frac{1}{2}ah$ (129). Посему $ab =$ прямоугольнику ah . Такимъ же образомъ докажемъ что треугольникъ $ack = \frac{1}{2}bc$, и что $bc =$ прямоугольнику mg слѣдовательно сумма $ab + bc = ah + mg = ac$. ч. д. н.

Слѣдст. Квадратъ какого нибудь бока изъ составляющихъ прямой уголъ, равенъ разности квадратовъ изъ діогонали ac и другого бока bc , то есть $ac^2 - bc^2 = ab^2$, также и $ac^2 - ab^2 = bc^2$.

145. ТЕОРЕМА. Діогонали bi квадрата $abgi$ точно измѣряютъ или вычислить не можно.

Доказ. Положимъ что бокъ квадрата ab или $ai = 1$, посему $ab^2 = 1$, также $ai^2 = 1$; и такъ $ab^2 + ai^2 = bi^2 = 2$: но число 2 есть не квадратное, изъ коего
Е 4 точнаго ф. 114

почнаго радика (жорня) сыскашь не можно (ариф. 178); слѣдовательно дѣгонали квадрата почно измѣрять или вычислить не можно.

146. ЗАДАЧА. По извѣстному основанію $ac = 80'$ и высотѣ $ab = 60'$ прямоугольнаго треугольника abc найти дѣгонали bc .

Рѣшен. Основаніе ac умножь квадратно. Но **1** но, также и высоту ab квадратно, изъ ф. **20** суммы сихъ квадратовъ изълеки корень квадрата, получишь требуемую дѣгонали bc , то есть

$$\begin{aligned} 80' \times 80' &= 6400'' = ac. & 60' \times 60' &= 3600'' = ab \\ 3600'' &= ab \\ 6400 &= ac \\ \hline 10000'' &= ab + ac = bc. & \sqrt{10000''} &= 100' = bc \end{aligned}$$

147. ЗАДАЧА. По извѣстнымъ, дѣгонали $bc = 90^\circ$ и высотѣ $ab = 60^\circ$ прямоугольнаго треугольника abc , сыскашь основаніе ac .

Рѣшен. Изъ квадрата дѣгонали bc вычти квадратъ высоты ab , попомѣ изъ разности сихъ квадратовъ, изълеки корень квадрата, получишь требуемое основаніе ac , то есть

$$90^\circ \times$$

$$90^{\circ} \times 90^{\circ} = 8100^{\circ} = \overset{-2}{bc} \cdot 60^{\circ} \times 60^{\circ} = 3600 = \overset{-2}{ab}.$$

$$8100^{\circ} = \overset{-2}{bc}$$

$$3600 = \overset{-2}{ab}$$

$$4500 = \overset{-2}{bc} - \overset{-2}{ab} = \overset{-2}{ac}. \sqrt[2]{4500} = 67^{\circ}, 08'' = ac$$

Слѣдств. Такимъ же образомъ по известной дѣгонали bc и основанію ac сыщется высота ab , когда изъ разности квадратовъ дѣгонали bc и основанія ac извлечется квадратной корень.

148. ЗАДАЧА. Дана площадь прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника $abc = 3200^{\circ}$ сыскать бока ab и ac .

Рѣшен. Изъ почекъ a и c проводя линіи ad и cd параллельно бокамъ bc и ab , No 4
будетъ фигура $abcd$ квадратъ. И такъ ф. 116
площадь треугольника abc удвоивъ получимъ площадь квадрата $abcd$. Квадратной корень сея площади будетъ = боку $ab = bc$, на конецъ по известнымъ ab и bc сыщется ac (146), то есть

$$3200^{\circ} = \triangle abc$$

$\times 2$

$$6400^{\circ} = abcd = \overset{-2}{ab}. \sqrt[2]{6400^{\circ}} = 80^{\circ} = ab = bc$$

$\times 2$

$$12800^{\circ} = \overset{-2}{ab} + \overset{-2}{bc} = \overset{-2}{ac}. \sqrt[2]{12800^{\circ}} = 113^{\circ}, 13'' = \text{дѣгонали } ca.$$

Доказ. Понеже $ab = bc$, чего ради и уголъ $bac = acb = 45$ град. также уголъ

$bac = acd = cad = 45$ град. слѣдовательно
 уголъ $bac + cad = acb + acd = 90$ град. посе-
 му фигура $abcd$ есть квадраѳъ, и треуголь-
 никъ $abc = acd$; слѣдственно треуголь-
 никъ $abc \times 2 = \overset{-2}{ab}$ и $\overset{-2}{V}ab = ab$.

149. ЗАДАЧА. По извѣстному боку
 $ab = 120^\circ$ равностороннаго треуголь-
 ника abc , сыскать площадь онаго.

Рѣшен. Изъ верха c на основаніе ab
 № 1. опуски перпендикуляръ cd , коимъ осно-
 ф. 33 ваніе ab раздѣлился на двѣ равныя час-
 ти въ точкѣ d ; чего ради по извѣстной
 ad и ac сыщи высоту cd треугольника
 abc (147), потомъ сыщи площадь онаго
 (137), то есть.

$$120^\circ = ab = ac. \frac{120^\circ}{2} = \overset{-2}{60^\circ} = ad$$

$$120^\circ \times 120^\circ = 14400^\circ = \overset{-2}{ac}$$

$$60^\circ \times 60^\circ = 3600^\circ = \overset{-2}{ad}$$

$$\overset{-2}{10800} = \overset{-2}{ac} - \overset{-2}{ad} = \overset{-2}{cd}.$$

$$\overset{2}{V}10800^\circ = 103^\circ, 9' = cd.$$

$$2) 120(60^\circ = ad = \frac{1}{2}ab$$

$60^\circ \times 103^\circ, 9' = 6234^\circ = \frac{1}{2}ab \times cd =$ площади
 треугольника abc (133).

150. ЗАДАЧА. Въ прямоугольномъ
 треугольникѣ abc извѣстны діого-
 наль $ab = 500^\circ$ и разность перпенди-
 куляровъ bc и $ac = bg = 100^\circ$ сыскать
 оныя перпендикуляры.

Рѣшен.

Рѣшен. Подолжа ag , изъ точки b опус- Но 4
ти перпендикуляръ bd , которой будетъ ф. 117
 $=gd$, умножь bg квадрапно, изъ поло-
вины сего квадрапа извлеки квадрапноу
корень, получишь bd или gd . Потомъ
въ треугольникъ abd по извѣстнымъ ab
и bd сыщи ad (147): изъ которой вычтя
 gd или bd останется ag ; и наконецъ
сдѣлай слѣдующую пропорцію $bg : ag =$
 $bd : ac$ или cg , и $cg + bg = bc$, то есть

$$100^{\circ} \times 100^{\circ} = 10000^{\circ} = \overset{-2}{bg} = \overset{-2}{gd} + \overset{-2}{bd}$$

$$2) 10000 (5000^{\circ} = \overset{-2}{\frac{1}{2}bg} = \overset{-2}{bd} = \overset{-2}{gd}$$

$$\overset{2-}{V} 5000^{\circ} = 70, 71'' = bd = gd.$$

$$500^{\circ} \times 500^{\circ} = 250000^{\circ} = \overset{-2}{ab}$$

$$5000^{\circ} = \overset{-2}{bd}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \overset{-2}{245000^{\circ}} = \overset{-2}{ab} - \overset{-2}{bd} = \overset{-2}{ad}$$

$$\overset{2-}{V} 245000^{\circ} = 494^{\circ}, 97'' = ad$$

$$70^{\circ}, 71'' = gd$$

$$\underline{\hspace{1cm}} 424^{\circ}, 26'' = ad - gd = ag.$$

$$bg : ag = bd : ac$$

$$100^{\circ} : 424^{\circ}.26'' = 70^{\circ}, 71'' : 299^{\circ}.99'' = ac = cg$$

$$\underline{\hspace{1cm}} 100^{\circ} = bg$$

$$399^{\circ}, 99'' = cg +$$

$$bg = bc$$

Доказ. Понеже $ac = cg$, слѣдственно
уголъ $cag = agc$ (32) $= bgd$ (20) $= 45^{\circ}$ (53)

$=$ углу gbd , посему $gd = bd$ (55) и $\overset{-2}{gd} + \overset{-2}{bd}$
 $= \overset{-2}{bg}$

$\overline{bg}^2 = 2 \overline{bd}^2$ (144); того ради $\frac{1}{2} \overline{bg}^2 = \overline{bd}^2$,
и $\overline{Vbd} = \overline{bd} = \overline{gd}$, также $\overline{ab}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{ad}^2$
(144), $\overline{Vad} = \overline{ad}$, $\overline{ad} - \overline{dg} = \overline{ag}$, а изъ
подобныхъ треугольниковъ bgd и agc , $bg :$
 $ag = bd : ac$ или cg (104), и $cg + bg = bc$.
ч. д. н.

151. ТЕОРЕМА. Во всякомъ тупоуголь-
номъ треугольникѣ abc , квадратъ бока ac
лежащаго противъ тупаго угла abc , безъ
суммы квадратовъ другихъ боковъ ab и bc ,
равенъ двумъ прямоугольникамъ изъ осно-
ванія ab и линіи pb лежащей между
тупымъ угломъ и перпендикуляромъ cp .

Ф. 118 Доказ. Изъ предъидущихъ теоремъ видно, что
 $\overline{ap}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bp}^2 + 2ab \times bp$ (143), $\overline{bc}^2 = \overline{pc}^2 + \overline{bp}^2$ (144)
также $\overline{ac}^2 = \overline{pc}^2 + \overline{ap}^2 (ab + bp + 2ab \times bp)$; и такъ;
вычти изъ сего квадрата сумму квадратовъ $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$
 $= \overline{ab}^2 + \overline{pc}^2 + \overline{bp}^2$, останется $\overline{ac}^2 - \overline{ab}^2 - \overline{bc}^2 = 2ab \times bp$.
ч. н. д.

152. ЗАДАЧА. Въ тупоугольномъ
треугольникѣ abc извѣстны бока $ac =$
 140° , $ab = 90^\circ$, $bc = 70^\circ$ сыскать пло-
щадь онаго.

Рѣшен. Изъ точки c , на продолженное основаніе
Ф. 119 ab опусти перпендикуляръ cd попомъ изъ площади
квадрата бока ac , вычти сумму квадратовъ боковъ
 ab и bc ; остатокъ раздѣли на двѣ равныя части,
частное число раздѣли на основаніе ab , получишь
 bd . По извѣстной bc и bd , сыщется высота cd (147);
попомъ

помомѢ умножь высоту cd половиною основанія ba будешь имѢшь требуемую площадь (137).

Числами.

$$\begin{aligned} 90^\circ \times 90^\circ &= 8100^\circ = \overline{ab}^{-2} \\ 70^\circ \times 70^\circ &= 4900^\circ = \overline{bc}^{-2} \\ \hline 13000^\circ &= \overline{ab}^{-2} + \overline{bc}^{-2} \end{aligned}$$

$$140^\circ \times 140^\circ = 19600^\circ = \overline{ac}^{-2}$$

$$19600^\circ = \overline{ac}^{-2}$$

$$13000^\circ = \overline{ab}^{-2} + \overline{bc}^{-2}$$

$$\hline 6600^\circ = \overline{ac}^{-2} - \overline{ab}^{-2} - \overline{bc}^{-2} = 2ab \times bd.$$

$$2) 6600^\circ (3300^\circ = ab \times bd. 90) 3300 (36^\circ, 66'' = bd$$

$$36, 66 \times 36, 66 = 1343^\circ, 9556^{IV} = \overline{bd}^{-2}$$

$$4900^\circ, 0000^{IV} = \overline{bc}^{-2}$$

$$1343^\circ, 9556^{IV} = \overline{bd}^{-2}$$

$$\hline 3556^\circ, 0444^{IV} = \overline{bc}^{-2} - \overline{bd}^{-2} = \overline{cd}^{-2}$$

$$\sqrt[2]{3556^\circ, 0444^{IV}} = 59^\circ, 63'' = cd.$$

$$2) 90 (= 45 = \frac{1}{2} ab.$$

$$59^\circ, 63'' \times 45^\circ = 2683^\circ, 35'' = \frac{1}{2} ab \times cd =$$

площади треугольника abc .

Другимъ образомъ.

Изъ точки c радиусомъ cb опиши кругъ $befg$, продолжи ab и ac пока пересѣкутся съ окружностію круга въ e и f , изъ точки c опусти перпендикуляръ cd , точки b и g , также e и f , соединя прямыми линіа-

линіями ef и bg будетъ. $bc = cf = gc$ радіусы; чего ради $ac + cf = bc + ac = af$, и $ac - cg = ag$. Треугольникъ aef подобенъ Треугольнику abg ; ибо уголъ eaf общій, уголъ $agb = aef$, потому что каждой изъ оныхъ измѣряется половиною дуги bfg (91. 96) по сему и уголъ $abg = afe$. Для подобія сихъ преугол. сдѣлай слѣдующую пропорцію, $ab : af (ac + bc) = ag : ae$. вычти ab изъ ae , получишь be , раздѣли be пополамъ, частное число будетъ bd ; и такъ по извѣстной діагонали bc и основанію bd прямоугольнаго преугольника bdc сыщется высота cd (147), которую умножа половиною основанія ba , получишь требуемую площадь.

То есть

$$140^{\circ} = ac$$

$$70^{\circ} = bc = cf$$

$$210^{\circ} = af$$

$$ab : af = ag : ae$$

$$90^{\circ} : 210^{\circ} = 70^{\circ} : 163^{\circ}, 33'' = ae$$

$$90^{\circ} = ab$$

$$73^{\circ}, 33'' = be,$$

$$2) 73^{\circ}, 33'' (36^{\circ}, 66'' = bd.$$

$$4900^{\circ}, 0000^{IV} = bc$$

$$36^{\circ}.66'' \times 36^{\circ}, 66'' = 1343^{\circ}, 9556^{IV} = bd$$

$$3556^{\circ}, 0444^{IV} = bc - bd = cd.$$

$$\sqrt[2]{3556^{\circ}, 0444^{IV}} = 59^{\circ}, 63'' = cd. 2) 90 (45 = \frac{1}{2} ab.$$

$$59^{\circ}, 63'' \times 45^{\circ} = 2683^{\circ}, 35'' = \frac{1}{2} ab \times cd = \text{площадь треугольника } abc.$$

153. ТЕОРЕМА. Во всякомъ треугольникѣ abc , у котораго перпендикуляръ cd падаетъ внутрь основанія ab ; сумма квадратовъ изъ боковъ ab и bc , безъ квадрата бока ac , равна двумъ прямоугольникамъ изъ основанія ab и отрезка bd .

Доказ. На основаніи ab сдѣлай квадратъ bi продолжи перпендикуляръ cd пока пересѣчется съ бокомъ квадрата ih , опредѣли $be = bd$ изъ точки e проводи ef въ параллель основанію ab , на gh сдѣлай квадратъ gk , будетъ прямоугольникъ $ar = rh$ (142), $\overline{bd}^2 = \overline{gh}^2$ по положенію, по сему $ar + \overline{bd}^2 = rh + \overline{gh}^2$, то есть прямоугольникъ $ae =$ прямоугольнику rk . И такъ для прямоугольнаго треугольника adc будетъ $\overline{ac}^2 = (\overline{ad})^2 + \overline{dc}^2$, а для треугольника dbc , $\overline{bc}^2 = (\overline{db})^2 + \overline{dc}^2$ (144): но $\overline{ab}^2 = \overline{fg}^2 + \overline{ae}^2 + \overline{rh}^2$, а сложа части сихъ послѣднихъ равенствъ съ первыми будетъ $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{fg}^2 + \overline{dc}^2 + \overline{ae}^2 + (\overline{rh}^2 + \overline{gh}^2)$ rk , изъ суммы сихъ квадратовъ вычти $\overline{ac}^2 = \overline{fg}^2 + \overline{dc}^2$ останется $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - \overline{ac}^2 = \overline{ae}^2 + rk = 2ae$, то есть двумъ прямоугольникамъ ae , изъ коихъ каждаго основаніе $= ab$ а высота $be = bd$. ч. д. и.

154. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ abc извѣстны бока $ac = 100^\circ$, $bc = 80^\circ$, $ab = 70^\circ$ сыскать высоту ad и площадь онаго.

Рѣшен. Умножь каждой бокомъ треугольника квадратно. Квадратъ бока ab сложи съ квадратомъ бока bc , изъ суммы сихъ квадратовъ вычти квадратъ бока ac , остатокъ раздѣли на двѣ равныя части, сіе частное раздѣли на основаніе bc получишь bd (153). Наконецъ по извѣстнымъ bd и ab сыщи высоту ad (147), которую умножа чрезъ половину основанія bc получишь желаемую площадь.

То

То есть

$$70^{\circ} \times 70^{\circ} = 4900^{\circ} = \overset{-2}{ab} \cdot 100^{\circ} \times 100^{\circ} = 10000^{\circ} = \overset{-2}{ac}$$

$$80^{\circ} \times 80^{\circ} = 6400 = \overset{-2}{bc}$$

$$\hline 11300^{\circ} = \overset{-2}{ab} + \overset{-2}{bc}$$

$$10000^{\circ} = \overset{-2}{ac}$$

$$\hline 1300^{\circ} = \overset{-2}{ab} + \overset{-2}{bc} - \overset{-2}{ac} = 2bc \times bd.$$

$$2)1300(650^{\circ} = bc \times bd. \quad 80)650(8^{\circ}.12'' = bd.$$

$$4900^{\circ}, 0000^{\text{IV}} = \overset{-2}{ab}$$

$$8^{\circ}.12'' \times 8^{\circ}.12'' = 65^{\circ}.9344^{\text{IV}} = \overset{-2}{bd}$$

$$\hline 4834^{\circ}, 0656^{\text{IV}} = \overset{-2}{ab} - \overset{-2}{bd} = \overset{-2}{ad}$$

$$\sqrt{4834^{\circ}, 0656^{\text{IV}}} = 69^{\circ}, 52'' = ad.$$

$$2)80(40^{\circ} = \frac{1}{2}bc$$

$$69^{\circ}, 52'' \times 40^{\circ} = 2780^{\circ}, 80'' = \frac{1}{2}bc \times ad = \text{пло-}$$

щади треугольника abc .

Доказ. Понеже $\overset{-2}{ab} + \overset{-2}{bc} - \overset{-2}{ac} = 2bc \times bd$ (153)
 чего ради $2bc \times bd : 2 = bc \times bd$, и наконецъ bc
 $\times bd : bc = bd$; прочее жъ доказано прежде.

ДРУГИМЪ ОБРАЗОМЪ:

Изъ почки a меньшимъ бокомъ ab
 опиши кругъ $bgef$, продолжи бокъ ca пока
 пересѣчется съ окружностью въ почкѣ f ,
 почки f , b и g , e соедини прямыми ли-
 нѣями bf и ge ; будетъ $af = ab = ae$
 радіусы, $ab + (ac)af = cf$, $ac - ae = ec$.
 Треугольникъ ges подобенъ bfc , по тому
 что уголъ c общій, уголъ $ceg = cbf$
 изъ

измѣряющіеся половиною дуги gef (91.96), и уголъ $cge = cf$; а того ради сдѣлай посылку $bc : cf(ab + ac) = ec : ge$ (104). Изъ основанія bc вычти cg останется bg , которую раздѣли на двѣ равныя части получивъ $bd = gd$ (76). Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ abd по извѣстнымъ ab и bd сыщется высота ad (147), которую умножа половиною основанія bc получишь требуемую площадь.

$$\begin{array}{rcl} 100^\circ & = & ac \\ 70^\circ & = & ab \\ \hline 170^\circ & = & ac + ab = cf \\ bc : cf & = & ec : cg. \\ 80^\circ : 170^\circ & = & 30^\circ : 63^\circ, 75' \\ 80^\circ, 00'' & = & bc \\ 63^\circ, 75'' & = & cg \\ \hline 16^\circ 25'' & = & bc - cg = bg \end{array}$$

$$2) 16, 25'' (8^\circ, 12'' = \frac{1}{2} bg = gd = bd.$$

$$70^\circ \times 70^\circ = 4900^\circ, 0000^{IV} = ab$$

$$8^\circ, 12'' \times 8^\circ, 12'' = 65^\circ, 9344^{IV} = bd$$

$$\begin{array}{r} 4834^\circ, 0656^{IV} = ab - bd = ad \end{array}$$

$$\sqrt[2]{4834^\circ, 0656^{IV}} = 69^\circ, 52'' = ad$$

$$69^\circ, 52'' \times 40^\circ = 2780^\circ, 80'' = \frac{1}{2} bc \times ad = \text{пло-}$$

щади треугольника abc .

$$2) 80 (40 = \frac{1}{2} bc$$

155. ЗАДАЧА. Въ данномъ треуголь-
никѣ abc , начертить кругъ.

Рѣшен. Углы a и c раздѣли на двѣ ра- ф. 122
вныя части линіями ad и cd , изъ точки

Часть II

Ж

d

d взаимнаго ихъ сѣченія опусти на основаніе ab перпендикуляръ dh ; на послѣдокъ изъ точки d радіусомъ dh опиши кругъ egh , которой даннаго преугольника abc коснется въ точкахъ e , g и h .

Доказ. Изъ точки d опусти на ac и bc перпендикуляры dg и de , проводи db , будетъ преугольникъ $adh = adg$, ибо уголъ $had = dag$, и уголъ $ahd = agd$ прямые по рѣшенію, по сему уголъ $adg = adh$, и боки ad боимъ преугольникамъ общій, чего ради $dh = dg$ (31). Также докажется, что $de = dg$, слѣдовательно $dg = dh = de$ радіусы круга, коего окружность касается боковъ даннаго преугольника abc (84).

Слѣдств. I. Когда продолжится боки ac преугольника abc такъ, что al будетъ $= bh$. То изъ сего произойдетъ: 1е линія cl будетъ равна половинѣ суммы боковъ преугольника abc ; ибо $eb = bh = al$, $ec = cg$, $ag = ah$ (92); посему сумма боковъ преугольника $abc = ag + cg + al$, а половина суммы сихъ трехъ боковъ $\frac{1}{2}(ab + bc + ac) = ag + cg + al = cl$. 2е линія cl будетъ равна суммѣ трехъ разностей, между половиною суммы боковъ и каждымъ бокомъ преугольника abc ; попому что $al =$ разности между половиною суммы cl и бокомъ ac ; также $ag =$ разности между cl и $al + gc$ или равнымъ сему количествомъ $(bh) be + ce$, по есть бокомъ bc ; и наконецъ $gc =$ разности между cl и $al + ag$ или равнымъ сему количествомъ $ah + bh$, по есть бокомъ ab ; слѣдовательно $cl =$ суммѣ трехъ разностей $ag + gc + al$, между каждымъ изъ трехъ боковъ преугольника abc и половиною суммы ихъ же боковъ.

Слѣдств.

Слѣдств. II. Изъ того явствуетъ, что треугольникъ abc раздѣленъ линіями ad , cd и bd на три треугольника adb , adc и bdc коиъ общая высота есть радиусъ вписаннаго круга; того ради сумма плоскостей сихъ треугольниковъ, то есть площадь треугольника abc будетъ $= \frac{1}{2} ab \times (dh) + \frac{1}{2} bc \times (ed) + \frac{1}{2} ac \times gd = \frac{1}{2} (ab + bc + ac) \times gd = cl \times gd$, то есть равна произведенію полсуммы боковъ треугольника abc , радиусомъ вписаннаго круга умноженной. По сей причинѣ площадь всякаго треугольника $abc =$ прямоугольнику, коего основаніе cl равно полсуммѣ боковъ треугольника а высота $gd =$ радиусу вписаннаго круга.

156. ТЕОРЕМА. Когда изъ половины суммы боковъ всякаго треугольника abc вычитается каждой бокомъ, разности ихъ между собою и чрезъ половину суммы боковъ умножатся: то квадратной корень сего произведенія, равенъ будетъ площади треугольника abc .

Доказ. Должно доказать, что $\sqrt{ag \times al \times gc \times cl} = gd \times cl =$ площади треугольника abc . Въ данномъ треугольникѣ опиши кругъ geh (155), изъ центра d на бока треугольника abc , опусти перпендикуляры dg , dh и de , на продолженной ca положи $al = hb$, на концѣ которой поставь перпендикуляръ lk , продолжи cd пока пересѣчется съ перпендикулярною lk въ точкѣ k , на продолженной cb положи $cp = cl$, точки k и p соедини прямою линією pk , при чемъ будетъ треугольникъ $kcl = ckr$, по тому что уголъ $lck = pck$, $lc = cp$ по положенію и ck общимъ треугольникамъ общій бокомъ; чего для будетъ $kp = lk$ и уголъ $kcl = kpc$ прямые (30). потомъ положи $ln = ah$, проводи kn , ak

№ 5
Ф. 123

и kb : но $ce + eb + bp = cg + ag + al$, изъ коихъ $ce + eb = cg + (hb)al$, того для $bp = ag = ah = ln$; также $kp = kl$ доказано, и уголъ $klm = p$ прямые, по сему треугольникъ kbp равенъ треугольнику klm (30), слѣдовательно $kb = km$; но ab по сочиненію равна am , линія ak общая, того ради треугольникъ $abk = mak$ (33); по сему и уголъ $bak = mak$, въ разсужденіи жъ равныхъ треугольниковъ adg и adh (155) уголъ $adg = adh$; но уголъ $g'lh + g'lh = lab + g'lh =$ двумъ прямымъ угламъ, по сему уголъ $g'lh = lab$, и половина угла $g'lh$ или $adg = \frac{1}{2}$ угла $lab = lak$, также и уголъ $kla = agl$ прямые; того ради треугольникъ agd подобенъ alk и треугольникъ cgd подобенъ clk по сочиненію. И такъ изъ подобныхъ треугольниковъ agd и alk , будетъ $gd : ag = al : lk$ (104), при чемъ $gd \times lk = ag \times al$ (ариф. 222); для подобства жъ треугольниковъ gcd и clk , будетъ $gc : gd = cl : lk$, а умножа члены перваго содержанія чрезъ cl , а члены втораго содержанія чрезъ gd , будетъ $gc \times cl : gd \times cl = cl \times gd : gd \times lk$ (ариф. 235); но изъ первой пропорціи $gd \times lk = ag \times al$, по сему $gc \times cl : gd \times cl = gd \times cl : ag \times al$, при чемъ произведеніе крайнихъ $ag \times al \times gc \times cl =$ произведенію среднихъ $(gd \times cl) \times (gd \times cl) = (gd \times cl)^2$; и наконецъ $\sqrt[2]{ag \times al \times gc \times cl} = gd \times cl$ (ариф. 197); но $gd \times cl =$ площади треугольника abc (155), слѣдовательно $\sqrt[2]{ag \times al \times gc \times cl} =$ площади треугольника abc .

157. ЗАДАЧА. По извѣстнымъ бокамъ $ab = 120^\circ$, $bc = 160^\circ$, $ac = 200^\circ$ треугольника abc , сыскать онаго площадь, не сыскивая высоты.

Рѣшен.

Рѣшен. Сперва сумму боковъ $ab + bc + ac$ треугольника abc раздѣли пополамъ, изъ половины оной, вычти порознь каждой бокъ, остатки сѣи умножь между собою, вышедшее произведеніе помножь половиною суммы боковъ, попомъ изъ сего произведенія извлеки корень квадрата, получишь плоскостное содержаніе треугольника abc .

Числами.

$$120^\circ = ab$$

$$160^\circ = bc$$

$$200^\circ = ac$$

$$480^\circ = ab + bc + ac \text{ сумм.}$$

$$480^\circ : 2 = 240^\circ = \frac{1}{2}(ab + bc + ac) = \text{полсум.}$$

$$240^\circ \quad 240^\circ \quad 240^\circ$$

$$120^\circ \quad 160^\circ \quad 200^\circ$$

$$120^\circ \text{ раз.} \quad 80^\circ \text{ раз.} \quad 40^\circ \text{ разн.}$$

$$120^\circ \times 80^\circ \times 40^\circ = 384000^\circ \times 240^\circ = 92160000^\circ$$

$$\sqrt{92160000} = 9600^\circ \text{ квад.} = \text{площад. } \triangle abc.$$

Доказ. смотри § 156.

158. ЗАДАЧА. Въ прямоугольникѣ $abcd$ извѣстны площадь $= 4800^\circ$ и діагональ $ac = bd = 100^\circ$ сыскать онаго бока ab и bc .

Рѣшен. Площадь прямоугольника раздѣли пополамъ, получишь площадь треугольника abc (127), которую раздѣли на половину основанія ac получишь высоту be (138) : но какъ діагональ $ac = bd$, то и $bf = af = \frac{1}{2} ac$ (128). И такъ по извѣстной bf и высотѣ be прямоугольнаго треугольника bef

ф.
124.

существова ef (147) которую вычтя изъ af останется ae ; наконецъ по известнымъ be и ae прямоугольнаго треугольника abe существова бокъ ab (146), а по (130) существова $bc = ad$.

Числами.

$$2)4800(2400^{\circ} = \frac{1}{2}abcd = \Delta abc$$

$$2)100(50^{\circ} = \frac{1}{2}ac = af = fc = bf$$

$$50)2400(48^{\circ} = be$$

$$50^{\circ} \times 50^{\circ} = 2500^{\circ} = \overset{-2}{bf}$$

$$48^{\circ} \times 48^{\circ} = 2304^{\circ} = \overset{-2}{be}$$

$$196^{\circ} = \overset{-2}{bf} - \overset{-2}{be} = \overset{-2}{ef}$$

$$\overset{2}{V}196 = 14 = \overset{2}{af}$$

$$36^{\circ} = af - ef = ae.$$

$$2304^{\circ} = \overset{-2}{be}$$

$$36^{\circ} \times 36^{\circ} = 1296^{\circ} = \overset{-2}{ae} \quad \overset{2}{V}3600^{\circ} = 60^{\circ} = ab.$$

$$60)4800(80^{\circ} = be$$

$$3600^{\circ} = \overset{-2}{be} + \overset{-2}{ae} = \overset{-2}{ab}.$$

159. ТЕОРЕМА. Площадь трапеціи $abcd$, равна произведенію полсуммы параллельныхъ линій bc и ad на высоту be , то есть, $be \times \frac{1}{2}(bc + ad) =$ площади трапеціи ac .

Доказ. Продолжи ad до f такъ, чтобъ df была равна bc , будетъ уголъ $cbg = dfg$ и уголъ $bcg = gdf$ (48); по сему треугольникъ $bcg = dfg$ (31), къ коимъ придавъ четверосторонникъ $abgd$, будетъ трапеція

пеція $abcd =$ треугольнику abf , ко-
раго площадь $= \frac{1}{2} af \times be$ (133); но $\frac{1}{2} af$
 $= \frac{1}{2} (ad + df) = \frac{1}{2} (ad + bc)$; слѣдова-
тельно $\frac{1}{2} (ad + bc) \times be$, то есть пол-
суммы параллельныхъ линій ad и bc
умноженная высокою be равна площади
трапеціи $abcd$.

Слѣдств. Того ради площадь трапеціи равна параллелограму коего основаніе равно полсуммѣ параллельныхъ линій, а высота равна высотѣ трапеціи.

160. ЗАДАЧА. По известнымъ бокамъ $ad = 160^\circ$, $bc = 120^\circ$, $ab = cd = 60^\circ$ трапеціи $abcd$, сыскать оной площадь.

Рѣшен. Изъ точки b проводи ли-
нѣю bh параллельно dc , будетъ $bc =$
 dh , вычпи (bc) dh изъ ad останется ah .
Въ треугольникѣ abh по премѣ извѣ-
стнымъ бокамъ ab , bh и ah сыщи перпен-
дикуляръ be (154), потомъ полсуммы
параллельныхъ линѣй $bc + ad$ умножь
высокою be , получишь желаемое.

Числами.

$$\begin{array}{rcl} 2) 40(20^\circ = ae = eh & & 160^\circ = ad \\ 60^\circ \times 60^\circ = 3600^\circ = ab & & 120^\circ = bc = hd \\ 20^\circ \times 20^\circ = 400^\circ = ae & & 40^\circ = ad - hd = ah \\ \hline 3200^\circ = ab - ae = be & & \end{array}$$

Ж 4

 $\sqrt[2]{3200^\circ}$

$$\sqrt[2]{3} 200^{\circ} = 56^{\circ}, 56'' = be. 2) 280 (140^{\circ} = \frac{1}{2}(bc + ad). \\ 120^{\circ} + 160^{\circ} = 280^{\circ} = bc + ad. 140^{\circ} \times 56^{\circ}, 56'' = \\ 7918^{\circ}, 40'' = \frac{1}{2}(bc + ad) \times be = \text{плещ. трапе-} \\ \text{пеціи } abcd.$$

Доказ. Справедливость сего видна изъ (159).

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, когда въ трапеціи будетъ извѣсна площадь и параллельныя линіи bc и ad , то высота be оной сыщется, ежели площадь раздѣлится на половину суммы параллельныхъ линій bc и ad .

161. ЗАДАЧА. По извѣстнымъ, пло^щади трапеціи $abcd$ $7919^{\circ}, 80''$, высо^{тѣ} $be = 56^{\circ}, 56''$ и содержанію параллельныхъ линій $bc : ad = 3 : 4$ сыскать параллельныя bc и ad .

Рѣшен. Площадь трапеціи $abcd$ раздѣлн на половину высоты be , получишь сумму параллельныхъ линій bc и ad ; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію $(3 + 4) 7 : 3$, какъ сумма параллельныхъ линій $bc + ad : bc$ (ариф. 228); наконецъ изъ суммы параллельныхъ линій вычти bc , остатокъ будетъ $= ad$, то есть

$$2) 56^{\circ}, 56'' (28^{\circ}, 28'' = \frac{1}{2} be, \\ 28^{\circ}, 28'') 7919^{\circ}, 8000^{IV} (280^{\circ} = bc + ad. \\ 3 : 4 = bc : ad \\ \hline (3 + 4) 7 : 3 = 280^{\circ} : 120^{\circ} = bc, \\ 280^{\circ} - 120^{\circ} = 160^{\circ} = ad$$

162. ЗАДАЧА. Даны Въ четверосторонникѣ $abcd$ бока $ab = 96^\circ$, $bc = 100^\circ$, $cd = 130^\circ$, $ad = 156^\circ$ и діогональ $ca = 142^\circ$ сыскать площадь онаго.

Рѣшен. По извѣстнымъ бокамъ сыщи въ треугольникѣ abc , равнымъ образомъ и въ треугольникѣ acd площадь (157), сложа оныя вмѣстѣ получишь требуемую площадь четверосторонника, то есть

ф.
126.

сыскан. по (157) площ. $\triangle abc = 4794^\circ$

площ. $\triangle acd = 8664^\circ$

13458^\circ = пло-

щади четвероугольника $abcd$.

163. ЗАДАЧА. Извѣстны площадь четверосторонника $abcd = 13458^\circ$, діогональ $ac = 142^\circ$ и содержаніе перпендикуляровъ $be : df = 5 : 9$, сыскать оныя.

Рѣшен. Раздѣля площадь четверосторонника $abcd$ на половину діогонали ac , частное будетъ равно суммѣ двухъ перпендикуляровъ be и df ; попомѣ сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ сумма содержанія $5 + 9 = 14 : 5$ такъ сысканная сумма перпендикуляровъ $be + df$ будетъ содержаться къ меньшему be ; наконецъ изъ суммы перпендикуляровъ вычтя be получишь df , то есть

Ж 5 2)

$$2) 142(71^{\circ} = \frac{1}{2}ac. \quad 71) 13458(189^{\circ}, 54'' = be + df.$$

$$67^{\circ}, 69'' = be$$

$$5 : 9 = be : df.$$

$$121^{\circ}, 85'' = df.$$

$$(5+9)14 : 5 = 189^{\circ}, 54'' : 67^{\circ}, 69'' = be.$$

Доказ. Понеже $df \times \frac{1}{2}ac + be \times \frac{1}{2}ac = (df + be) \times \frac{1}{2}ac =$ площади четвероспоронника $abcd$, изъ чего явствуемъ, что площадь онаго $(df + be) \times \frac{1}{2}ac$ раздѣленная на $\frac{1}{2}ac = df + be$; но $be : df = 5 : 9$, по сему $5 + 9 = 14 : 5 = df + be : be$.

164. ТЕОРЕМА. Площади подобныхъ треугольниковъ abc и edh содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ ac и dh .

Нѳ. 90. **Доказ.** Изъ верховъ b и e опуски на ф. 90 основанія ac и dh перпендикуляры bp и eo , будетъ $bp : eo = ac : dh$ (104), а умножа предъидущіе члены чрезъ ac , а послѣдующіе чрезъ dh , будетъ $bp \times ac : eo \times dh = (ac \times ac) : (dh \times dh)$ (ариф. 235); а по раздѣленіи членовъ перваго содержанія на двѣ равныя части, будетъ $\frac{bp \times ac}{2} : \frac{eo \times dh}{2} = ac : dh$, то есть площадь треугольника abc къ площади треугольника edh , какъ квадратъ бока ac къ квадрату бока dh .

165. ЗАДАЧА. Въ подобныхъ треугольникахъ abc площадь $= 2700^{\circ}$, а въ тре-

треугольникъ ade бока $ad = 80^\circ$, $ae = 100^\circ$, $de = 120^\circ$ известны; сыскать бока ab , ac и bc треугольника abc .

Рѣшен. Сперва по известнымъ премѣ бокамъ треугольника ade сыщи площадь No 4 онаго (157); потомъ сдѣлай слѣдующую ф. 98 пропорцію: какъ площадь треугольника ade къ площади треугольника abc , такъ квадрапная площадь бока de , къ площади квадрапна бока bc (164); а по извлеченіи квадрапнаго корня получишь боки bc ; потомъ будетъ $de : bc = ae : ac$, и наконецъ $de : bc = ad : ab$ (104), то есть сысканная по (157) площадь. $\Delta ade = 3968$

$$\Delta ade : \Delta abc = de^2 : bc^2$$

$$3968^\circ : 2700^\circ = 14400^\circ : 9798^\circ = bc^2$$

$$\sqrt{9798^\circ} = 99^\circ = bc$$

$$de : bc = ae : ac$$

$$120^\circ : 99^\circ = 100^\circ : 82\frac{1}{2}^\circ = ac.$$

$$de : bc = ad : ab$$

$$120^\circ : 99^\circ = 80^\circ : 66^\circ = ab$$

Предъувѣдомленіе. Въ послѣдующихъ задачахъ рѣшеній числами кромѣ липсерайнаго, выводитъ я болѣе не намеренъ; ибо опредѣля произвольною величиною известные части фигуръ, легко можно руководствомъ cadaго предложеннаго рѣшенія, сыскивать числами неизвестныя части; какъ по довольно видно изъ рѣшеній предъидущихъ задачъ.

166. ТЕОРЕМА. Въ треугольникахъ abc и def , когда уголъ $a =$ углу d , то площади оныхъ треугольниковъ abc и def , содержатся какъ прямоугольники сдѣланные изъ боковъ ab , ac , и de , df составляющихъ равные углы.

Но 5 Доказ. Изъ верховъ c и f на основаніи **ф.127** ab и de опусти перпендикуляры cp , fq . Треугольники acp и fdq будутъ подобны; ибо уголъ $a = d$ и $apc = dqf$ прямые, по сему уголъ $pca = dfq$ (53); чего ради $cp : fq = ac : df$ (104), а умножа предъидущіе члены чрезъ ab , а послѣдующіе чрезъ de , будетъ $cp \times ab : de \times fq = ac \times ab : df \times de$ (ариф. 235); наконецъ по раздѣленіи членовъ перваго содержанія на 2 будетъ $\frac{1}{2}cp \times ab : \frac{1}{2}fq \times de = ac \times ab : df \times de$, то есть площадь треугольника abc къ площади треугольника def какъ произведеніе боковъ ac и ab къ произведенію боковъ df и de .

167. ТЕОРЕМА. Во всякомъ параллелограммѣ $abcd$ сумма квадратовъ всѣхъ боковъ, равна суммѣ квадратовъ діагоналей

Доказ. Проведи изъ верха угла a на cd **ф.128** перпендикулярную линію af , а изъ точки c на продолженную ba , перпендикулярную ce , будетъ $ec = af$, $cf = ae$ (50). И такъ въ разсужденіи тупоугольнаго треуголь-

треугольника abc будетъ $bc - ab - ac =$
 $2ab \times ac$ (151) ; а въ разсужденіи тре-
 угольника adc , $ac + (cd) ad - ad =$
 $2(cd)ab \times (cf)ac$ (153) , по сему $bc - ac$
 $- ab = ac + ab - ad$, придай къ симъ час-
 шимъ $ac + ab + ad$, будетъ $bc + ad =$
 $2ac + 2ab = ac + (ac) db + (ab) cd$.

168. ЗАДАЧА. Въ параллеграмѣ $abcd$
 извѣстны бока ab , bc и діогональ db
 сыскать діогональ ac .

Рѣшен. Умножь каждой бокъ паралле-
 грама $abcd$ квадрапно , сложа оныя вмѣс-
 тѣ , вычпи изъ сей суммы квадрапъ діо-
 гонали db , остатокъ будетъ равенъ ква-
 драпу діогонали ac ; на конецъ корень
 сего квадрата будетъ равенъ пребуемой
 діогонали ac , то есть $ab + dc + ad$
 $+ bc = 2ab + 2ad = ac + db$, и $ac + db$
 $- db = ac$ (167) , $\sqrt{ac} = ac$.

№ 4
Ф.105

Другимъ образомъ.

Въ треугольникѣ abd сыщи перпенди-
 куляръ af (154) . По извѣстной af и ad
 треугольника adf сыщи df (147) . Раздѣ-
 ли db на двѣ равныя части , частное бу-
 детъ de изъ которой вычтя df полу-
 чишь ef , потомъ въ треугольникѣ aef ,
 по

по извѣстной af и f , сыщи ae (146). Но $ae = ec$ (128), посему $ae \times 2 = ac$.

169. ЗАДАЧА. По извѣстной площади прямоугольника $abcd$ и содержанію бока ab къ $ad = 3 : 4$ сыскати бока ab и ad .

№ 5. Рѣшен. Понеже содержаніе $3 : 4$ значитъ, что ф. бока ab содержитъ въ себѣ три такихъ частей каковыхъ въ бока ad есть четыре, чего ради 3 умноженное чрезъ 4 $= 12$ три равнымъ квадратамъ составляющимъ площадь прямоугольника $abcd$. И такъ когда площадь прямоугольника $abcd$ раздѣлишь на число сихъ квадратовъ, то есть на 12 частей, частное число будетъ равно площади одного квадрата $acgf = \frac{-2}{ae}$, квадратной корень площади сего квадрата будетъ $=$ боку $af = ae$, наконецъ $af \times 4 = ad$, $ae \times 3 = ab$.

Слѣдет. Изъ сего явствуетъ, когда дана будетъ площадь прямоугольнаго треугольника abd и содержаніе перпендикуляровъ ab и ad , то слѣдуетъ площадь онаго удвоить, произведеніе будетъ равно площади прямоугольника $abcd$; а потомъ по рѣшенію предъ идущей задачи найдется высота ab и основаніе ad , и напоследокъ $\frac{-2}{ab} + \frac{-2}{ad} = \frac{-2}{bd}$, $\sqrt{\frac{-2}{bd}} = bd$.

170. ЗАДАЧА. По извѣстной дѣгонали bc и содержанію перпендикуляровъ $ab : ac = 4 : 5$ прямоугольнаго треугольника abc , найти оные перпендикуляры.

Рѣшен. Понеже $\frac{-2}{bc} = \frac{-2}{ab} + \frac{-2}{ac}$ ф. 130 перпендикуляръ же ab содержитъ въ себѣ 4 такихъ частей каковыхъ въ ac есть пять. И такъ умножа части перпендикуляра ab и части основанія ac квадратно, то

то есть, $4 \times 4 = 16 = \overline{ab}^2$ и $5 \times 5 = 25 = \overline{ac}^2$, сложи оныя вмѣстѣ, получишь число квадратовъ $= 16 + 25 = 41$ составляющихъ плоскость квадрата діAGONALI bc ; сего ради умножь bc квадратно, получишь сумму площадей $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$, которую раздѣля на число квадратовъ составляющихъ вообще ихъ плоскость, то есть на 41, частное число будетъ равно одному квадрату $aklm = \overline{am}^2$, изъ площади сего квадрата изведи корень, получишь бокъ $am = ak = an$, наконецъ $ak \times 5 = ac$ и $an \times 4 = ab$.

О ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ ЛИНІЯХЪ ОТНОСЯЩИХСЯ КЪ КРУГУ.

171. Определѣніе. Въ кругѣ линіи gn , pq и проч. споящія на діаметрѣ ef перпендикулярно на зываются полулоперешники круга; а частны en , nf и ep , pf діаметра ef отрѣзки. Ф. 131

172. ТЕОРЕМА. Квадратъ всякаго полулоперешника на примѣръ gn , равенъ прямоугольнику изъ отрѣзковъ en и nf .

Доказ. Изъ почки g проведи линіи ge и gf , будетъ треугольникъ egf прямоугольной (91), и перпендикулярною gn раздѣленъ на два другіе прямоугольные треугольника egn и gnf , кои между собою подобны (122); чего ради $en : ng = ng : nf$, при чемъ $en \times nf = \overline{gn}^2$, то есть, пло-

площадь прямоугольника изъ отрѣзковъ en и nf = площади квадрата изъ полупоперешника gn . (133).

Слѣдст. I. Изъ сего явствуетъ, что всякая линѣя, проведенная изъ какой нибудь точки взятой на окружности круга перпендикулярно къ діаметру ef , есть средняя пропорціональная линѣя между отрѣзками онаго, и квадратъ всякаго полупоперешника равенъ параллелограму изъ отрѣзковъ, какъ $gn^2 = en \times nf$, и $pq^2 = ep \times pf$ и проч.

Слѣдст. II. Всякая хорда есть средняя пропорціональная линѣя между діаметромъ ef и частію онаго находящеюся между концемъ хорды, и опущеннымъ изъ другаго ея конца перпендикуляромъ gn . Ибо прямоугольной треугольникъ egn подобенъ egf (122); чего ради $en : eg = eg : ef$; слѣдовательно eg есть средняя пропорціональная линѣя между en и ef , при чемъ $en \times ef = eg^2$; также и хорда fg есть средняя пропорціональная линѣя, между діаметромъ ef и отрѣзкомъ nf , и $ef \times nf = fg^2$.

173. ЗАДАЧА. Между двухъ данныхъ линѣй ab и cd сыскать среднюю геометрическую.

Рѣшен.

Рѣшен. Данныя прямыя линіи ab и cd . ф. 132
соединя въ одну прямую линію ef , на
сосоставленной изъ оныхъ линіе enf опиши
полкруга, потомъ изъ соединенія точки n
поспавъ перпендикулярную ng (40), кото-
рая будетъ требуемая средняя пропорціо-
нальная линія (172).

174. ЗАДАЧА. Въ полкругѣ egf извѣ-
стны части en и nf діамetra ef , сы-
скать полулоперешникъ gn и хорды
 eg и gf .

Рѣшен. Понеже треугольникъ egf
прямоугольной и припомъ $ne \times nf = gn^2$ ф. 131
(172), по сему умножа en на nf , произве-
деніе будетъ равно площади квадрата
полулоперешника gn , изъ котораго квад-
ратной корень будетъ $= gn$. Потомъ по
извѣстнымъ en и gn прямоугольнаго тре-
угольника eng сыщется eg . Такимъ же
образомъ сыщется и gf .

Слѣдст. Ежели будетъ извѣстна часть
 en и хорда eg , то прочее сыщется слѣ-
дующимъ образомъ; $en : eg = eg : ef$,
 $ef - en = nf$. Потомъ $nf : gf = gf : ef$ (172),
при чемъ будетъ $nf \times ef = gf^2$, то есть
площадь прямоугольника изъ ef и nf , ра-
вна квадрату изъ хорды gf , котораго ква-
дратной корень будетъ $= gf$.

175. ЗАДАЧА. Въ полкругѣ egf , извѣстны полулоперешникъ gn , и діаметръ ef , сыскать части en и nf .

Рѣшен. Діаметръ ef раздѣли пополамъ ф.132 въ точкѣ k , изъ центра k проводи линію kg , которая будетъ $= kf$; попомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ gnk по извѣстнымъ gn и kg сыщется nk . Наконецъ $nk + kf = nf$, $ke - nk = en$.

176. ЗАДАЧА. Въ прямоугольникѣ $abcd$, извѣстны площадь и сумма боковъ $ab + bc$, сыскать оныя бока порознь.

Рѣшен. На продолженной bc опредѣли $bf = ab$, ф.133 попомъ раздѣли fc на двѣ равныя части въ точкѣ g , радіусомъ gf опиши полкруга, продолжи ab до e , будетъ $bc \times (ab) fb = \overline{be}^2$, то есть площадь прямоугольника ac равна площади квадрата изъ полулоперешника be (172), коего квадратной корень $= be$; наконецъ по извѣстному радіусу $eg = \frac{1}{2} cf$ и полулоперешнику be , сыщется bg (147), и $bg + (eg) gc = bc$, $fg - bg = bf = ab$.

Слѣдст. Такимъ же образомъ по извѣстнымъ, площади, и суммѣ боковъ $ab + ad$ прямоугольнаго треугольника abd сыщется онаго бока, когда площадь его умножится чрезъ 2, то произведеніе будетъ равно площади прямоугольника ca ; а попомъ по предвѣдущей задачѣ опредѣлялся бока ab и $bc = ad$, а по (146) найдется діогональ bd .

177. ЗАДАЧА. Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc , извѣстны діогональ bc и сумма перпендикуляровъ $ab + ac$, сыскать оныя порознь. Рѣшен.

Рѣшен. На продолженной ac опредѣли $ae = ab$,
 будетъ $ec = ac + (ae) ab$, сдѣлай на bc и ec
 квадраты bd и eg , продолжи ab до i , проводи дѣго-
 наль ig которая съ продолженною ab пересѣчется въ
 точкѣ f , чрезъ которую проводи fm параллельно
 къ ec , при чемъ na и im будутъ квадраты; ибо уголъ
 $aei = 45$ град. $= efa (53) = ifg (20) = igf$, посему
 $ae = af$, также $if = ig = fm = ac$. И такъ
 умножь $(ab + ac) ec$ квадратно, получишь площадь
 квадрата $ekgc = (ea) ab + (fm) ac + am + (kf) am$;
 потомъ умножь bc квадратно будетъ bc равенъ сум-
 мѣ площадей квадратовъ $ab + ac = ea + fm$. Сум-
 му сихъ квадратовъ вычтя изъ ec остатокъ бу-
 детъ $am + (kf) am = am$, которое раздѣля попо-
 ламъ, получишь площадь прямоугольника am , коего
 сумма боковъ $af (ab) + ac$ известна, а напоследокъ
 по прошедшей задачѣ найдутся порознь бока ac
 и $af = ab$.

ф.
134

178. ЗАДАЧА. Площади двухъ квадра-
 товъ $ak + bl$ вообще и сумма боковъ $ab +$
 bc известны; сыскать каждой бокъ ab и
 bc порознь.

Рѣшен. На линіе ac сдѣлай квадратъ $acdf$. Про-
 веди дѣгональ cf , продолжи kb до e , потомъ опре-
 дѣли $cg = bc$, изъ точки g проводи gn параллельно
 ac , которая пересѣчетъ дѣгональ fc въ точкѣ q ,
 причемъ будетъ квадратъ $bg = bl$ и квадратъ
 $ne = ak$. И такъ умножа ac квадратно, будетъ
 $ac = acdf = bg + ne + nb + qd$, изъ сей площади
 вычти сумму площадей $(ak) ne + (bl) bg$ оста-
 токъ будетъ $nb + qd$; но $qd = nb (142)$, посему
 $nb + qd = 2nb$. Сумму сихъ прямоугольниковъ раз-
 дѣля пополамъ, получишь площадь прямоугольника
 nbq .

ф. 135

116 о пропорціональныхъ линѣяхъ

$abqn$, коего сумма боковъ $ab + (bc)bq$ извѣстна; по сей причинѣ бока ab и $bq = bc$ по § 176 сыщутся.

179. ЗАДАЧА. По извѣстнымъ, площади прямоугольника $abcd$ и разности боковъ $ad - ab = fd$ сыскать бока ab и ad .

Рѣшен. Продолжи ad до n , потомъ раздѣляя fd пополамъ, изъ точки e радиусомъ ae опиши полкруга am , продолжи cd до m , потомъ извлеки корень квадрата изъ площади даннаго прямоугольника $abcd$, получишь dm (172). По извѣстной de и dm сыщи em (146) $= ea$; изъ которой вычтя $ef = \frac{1}{2}df$, остатокъ будетъ $= af = ab$, также $ae + ed = ad$.

Доказ. Понеже $\overline{dm}^2 = ad \times (dn)dc = adcb$ (172), и $\sqrt{dm} = dm$, также $\overline{dm}^2 + \overline{ed}^2 = \overline{em}^2$ (146), $\sqrt{em} = em = ea$ и проч.

180. ЗАДАЧА. По извѣстнымъ бокамъ ab , ac и bc треугольника abc ; сыскать радиусъ bd описаннаго круга.

Рѣшен. Изъ точки b опусти перпендикуляръ be , проложи радиусъ bd до f , точки c и f соедини прямою линѣею cf . По извѣстнымъ бокамъ ab , bc и ac треугольника abc , сыщи перпендикуляръ be ; но какъ треугольникъ aeb подобенъ bfi , ибо уголъ $a = f$ (91), уголъ $aeb = bfi$ прямые и уголъ $abe = fbc$; чего ради будетъ $be : bc = ab : bf$ діаметру bf , и $\frac{1}{2}bf$ равна требуемому радиусу $bd = df$.

181. ТЕОРЕМА. Когда три линѣи en , eg и ef въ непрерывной геометрической про-

пропорціи , то квадратъ первой линіи содержится къ квадрату второй линіи , какъ первая къ третій ; то

$$\overset{-2}{en} : \overset{-2}{eg} = \overset{-2}{en} : \overset{-2}{ef}.$$

Доказ. Понеже $\overset{-2}{eg} = \overset{-2}{en} \times \overset{-2}{ef}$ (172) ; чего ради будетъ $\overset{-2}{en} : \overset{-2}{eg}$ или $\overset{-2}{en} \times \overset{-2}{ef} = \overset{-2}{en} : \overset{-2}{ef}$, и пропорція справедлива поному , что произведеніе крайнихъ $\overset{-2}{en} \times \overset{-2}{ef}$, равно произведенію среднихъ $\overset{-2}{en} \times \overset{-2}{en} \times \overset{-2}{ef}$ или $\overset{-2}{en} \times \overset{-2}{ef}$ (ариф. 225). ф. 131

Слѣдст. Ежели діаметръ ef раздѣлится на нѣсколько равныхъ частей на примѣръ на 5 и изъ одной пятой части какъ en діаметра ef поставя перпендикуляръ ng проведется хорда eg : то квадратъ сей линіи eg будетъ во сколько разъ больше квадрата части діаметра en , во сколько частей діаметръ раздѣленъ. Ибо $en : eg = eg : ef$ или $5en$ (172) , причемъ будетъ $\overset{-2}{eg} = \overset{-2}{5en}$ (ариф. 222) : но $\overset{-2}{en} : (\overset{-2}{5en}) \overset{-2}{eg} = 1 : 5$; слѣдовательно $\overset{-2}{eg}$ въ пять разъ больше $\overset{-2}{en}$.

182. ТЕОРЕМА. Когда въ кругѣ $abcd$ двѣ хорды ab и dc взаимно пересѣкутся , то прямоугольникъ изъ частей ae и eb одной , будетъ равенъ прямоугольнику изъ частей ce и ed другой хорды.

Доказ. Точки a и d , также b и c
 ф. 138 соединя прямыми линіями ad и bc бу-
 дутъ треугольники ade и bec подобны
 между собою; ибо уголъ $dae = ecb$,
 уголъ $ade =$ углу ebc (91), также и
 уголъ $dea = bec$ (20); чего ради $ae : ec$
 $= de : eb$ (104), и потому $eb \times ae =$
 $de \times ec$ (ариф. 222), то есть прямоуголь-
 никъ изъ линій eb и ae , равенъ прямо-
 угольнику, имѣющему основаніе de , а
 высоту ec (133).

Слѣдст. Ежели будутъ извѣстны час-
 ти ce и de хорды de , и часть ae хорды
 ab ; то другая часть eb сыщется. Поели-
 ку $ae \times eb = de \times ce$ (182); того ради ум-
 ножь часть de на ce , сіе произведеніе
 раздѣля на часть ae получишь eb .

183. ТЕОРЕМА. Когда изъ точки c
 лежащей внѣ круга, проведутся два
 секанса ac и bc , то прямоугольникъ
 изъ наружной части cd и всего секанса
 ac , равенъ прямоугольнику изъ на-
 ружной части ce и всего секанса bc .

Доказ. Точки a и b также d и e соединя
 ф. 139 прямыми линіями ab и de , треугольни-
 ки dec и abc будутъ подобны между со-
 бою; пошому что уголъ $dec = cab$ измѣ-
 ряющіеся половиною дуги deb (91. 96),
 уголъ c общій, по сему и уголъ $edc =$
 углу abc ; чего ради $dc : bc = ce : ac$ (104),

и

и $ac \times dc = bc \times ce$ (ариф. 222); то есть площадь прямоугольника котораго основаніе секансѣ ac а высота dc , равна площади прямоугольника изъ линій bc и ce (133).

184. ЗАДАЧА. Извѣстны части ab и be секанса ae , и часть cd другаго секанса ad ; сыскать часть ac .

Рѣшен. Часть ab сложи съ be , сумму ихъ $ab + be = ae$ умножь чрезъ ab , произведеніе $ae \times ab$ будетъ $= ac \times ad =$ площади прямоугольника df коего основаніе ad а высота $af = ac$ (183); въ которомъ по извѣстной разности боковъ $ad - (ac)af = dc$, и площади прямоугольника df сыщется ad и $af = ac$ (179).

Ф.
140

185. ТЕОРЕМА. Ежели изъ точки c , лежащей внѣ круга, проведутся касательная cf и секансѣ ac , то квадратъ касательной cf , будетъ равенъ прямоугольнику изъ цѣлаго секанса ac и наружной его части cd .

Доказ. Изъ касательной точки f къ точкамъ a и d проведи хорды af и fd . Треугольники acf и dcf будутъ подобны между собою: ибо уголъ $caf = dcf$, потому что каждой изъ нихъ мѣряется половиною дуги def (91. 93), уголъ c общимъ треугольникамъ общій, по сему и уголъ $afc = fdc$. И такъ въ разсужденіи

Ф.
139

подобства треугольникъ будетъ $dc : cf = cf : ac$ (104); по сей причинѣ $cf^2 = dc \times ac$ (ариф. 222), то есть площадь квадрата изъ линіи cf равна площади прямоугольника, котораго основаніе ac а высота cd (133).

Слѣдст. Изъ чего видно, что касательная cf есть средняя пропорціональная между наружною частію cd и цѣлымъ секансомъ ac .

186. ЗАДАЧА. Извѣстны части bc и cd секанса bd ; сыскать касательную ab .

Рѣшен. Понеже $bc \times bd = ab^2$ (185), **фиг. 141** чего ради сложи bc съ cd коихъ сумма будетъ $= bd$; потомъ умножь bc чрезъ bc , произведеніе $bd \times bc$ будетъ равно квадрату изъ линіи ab . Изъ площади сего квадрата извлеки квадратной радикалъ, которой будетъ $= ab$.

Слѣдст. I. Когда даны будутъ касательная ab и секансъ bd , то сыщется bc , если ли квадратъ изъ касательной ab раздѣлится на db , получишь bc .

Слѣдст. II. Ежели даны будутъ касательная ab и внутренняя часть секанса cd , то сыщется наружная онаго часть bc ; ибо умножа ab квадратно, получишь площадь прямоугольника bf (185), коего разность боковъ $db - (bc) be = dc$ извѣстна, сыщется $be = bc$ (179).

187. ЗАДАЧА. Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc , известны перпендикуляръ bc и разность bd діогонали ab и основанія ac ; сыскать ac и ab .

Рѣшен. Изъ точки a радіусомъ ac опиши кругъ cde , продолжи ba до e , линія bc будетъ касательная (84): того ради умножь перпендикуляръ bc квадрапно, площадь сего квадрата раздѣли на разность bd получишь секансъ be (185); изъ коего вычти bd , останеся діаметру de , которой раздѣля на двѣ равныя части, частное будетъ $= ad = ac$, и $ad + bd = ab$.

Ф.
142

Доказ. Понеже $bc^2 = db \times be$ (185), следовательно $\frac{db \times be}{db} = be$ (136).

188. ЗАДАЧА. Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc , известны высота bc , и сумма діогонали ab вообще съ основаніемъ ac , то есть $ac + ab$; сыскать оныя порознь.

Рѣшен. Изъ точки a , радіусомъ ac опиши кругъ ced . Продолжи ba до e , будетъ $ac = ae$, и $ab + ac = ab + ae = be$ линія bc будетъ касательная (84), того ради умножь bc квадрапно, площадь сего квадрата раздѣли на сумму боковъ $ab + ac = be$, частное будетъ $= db$, вычти оную изъ be останеся діаметру ed , $\frac{1}{2}ed = ad = ac$, и $ad + db = ab$.

З б

Доказ.

Доказ. Понеже $bc^2 = db \times be$ (185),
 слѣдовательно $\frac{db \times be}{be} = db$ (136).

189. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ abc ,
 извѣстны части db и dc основанія bc ,
 и два бока вообще $ab + ac$; сыскать
 оныя порознь.

№ 4 Рѣшен. и доказ. Изъ точки a мень-
 Ф.121 шимъ бокомъ ab опиши кругъ $bfcg$, про-
 должи ca до f , точки e и g , b и f со-
 едини прямыми линѣями eg и bf , при-
 чемъ будетъ $ab = af$, $cf = ac + ab$,
 также $bd = dg$ (76); по сему $cd - gd$
 $= gc$. Треугольникъ bcf подобенъ cge по-
 тому, что уголъ c общій, и уголъ f
 $= cge$ измѣряющіеся половиною дуги egb
 (91. 96), и уголъ $cbf = ceg$, и для по-
 добія оныхъ будетъ $cf : cg = bc : ec$ (104);
 вычши ec изъ cf , остатокъ будетъ ра-
 венъ діаметру $ef = ea + ab = 2ab$, и
 $2ab : 2 = ab = ae$. также $ce + ae = ac$.

№ 5 190. ТЕОРЕМА. Когда на концѣ діаметра
 Ф.143 af , поставится перпендикуляръ cf , и про-
 тянется отъ другаго конца a діаметра
 секансъ ac , то квадратъ діаметра af будетъ
 равенъ прямоугольнику изъ секанса ac и
 хорды ad .

Доказ. Изъ точки f въ точку d гдѣ окру-
 жность круга cf проведенною ac взаимно пересѣклась
 проводи

проведи линѣю df , будущѣ треугольники adf и afc между собою подобны; ибо уголъ a общій, уголъ adf заключающійся въ полкругѣ прямой, равенъ прямому углу afc ; посему и уголъ $afd = afc$; чего ради $ad : af = af : ac$ (104), слѣдовательно $ad \times ac = af^2$, то есть прямоугольникъ изъ линѣй ad и ac равенъ квадрату изъ линѣи af (133).

191. ТЕОРЕМА. Ежели изъ точки a взятой на окружности круга проведутся двѣ хорды ab и ac и третья fd ихъ пересѣчетъ такъ, что дуга $af = ad$; то прямоугольникъ изъ отрезка ag и цѣлой хорды ab , будетъ равенъ прямоугольнику изъ отрезка ae и цѣлой хорды ac ; и каждой изъ сихъ прямоугольникъ равенъ квадрату изъ хорды af .

Доказ. Іе Точки b и c соединя прямою линѣею bc будущѣ треугольниками age и abc подобны между собою; ибо уголъ bac общій, уголъ $c =$ углу age , потому что мѣра угла $c = \frac{1}{2}$ дуги $bf + \frac{1}{2}af$ или $\frac{1}{2}ad$ (91), а мѣра угла $age = \frac{1}{2}$ дуги $bf + \frac{1}{2}ad$ или $\frac{1}{2}af$ (97), посему и уголъ $abc =$ углу gea ; и для подобства треугольниковъ age и abc , будетъ $ag : ac = ae : ab$ (104); слѣдовательно $ab \times ag = ac \times ae$ (ариф. 212), то есть прямоугольникъ изъ линѣй ab и $ag =$ прямоугольнику изъ линѣй ac и ae (133).

2е. Точки b и f соединя прямою линѣею bf треугольниками afg и afb будущѣ подобны; ибо уголъ fab общій; уголъ $afd = abf$, потому что дуга $af = ad$ (91), посему и уголъ $agf = afb$; и такъ въ разсужденіи подобства треугольниковъ будетъ $ag : af = af : ab$ (104); причемъ $ab \times ag = af^2 = ac \times ae$. ч. н. д.

Ф.
144

192. ЗАДАЧА. Въ кругѣ $afbcd$ проведены изъ точки a двѣ хорды ab и ac и третья fd ихъ пересѣкаетъ такъ, что дуга $af =$ дугѣ ad ; известны части ag и bg хорды ab , и часть ec хорды ac , сыскать хорду af и часть ae хорды ac .

Ф. Рѣшен. и Доказ. Понеже по предъидущей 144 теоремѣ прямоугольникъ изъ линій ab и ag , равенъ квадрату изъ хорды af , и прямоугольнику изъ линій ae и ac : чего ради умножь ab чрезъ ag получишь площадь квадрата изъ линіи af , также и площадь прямоугольника изъ линій ae и ac ; изъ площади квадрата хорды af , извлеки квадратной корень получишь хорду af . Напоследокъ по известной площади прямоугольника изъ линій ac и ae и разности ec боковъ $ac - ae$ сего прямоугольника сыщется ae (179).

193. ТЕОРЕМА. Прямоугольникъ изъ діагоналей ac и db всякого четвероугольника $abcd$ вписаннаго въ кругѣ, равенъ суммѣ прямоугольниковъ изъ противолежащихъ боковъ, то есть $ab \times cd + bc \times ad = ac \times db$.

№ 3 Доказ. Положимъ что уголъ abd меньше угла ф. 87 dbc . И такъ сдѣлавъ уголъ $fbc = abd$, треугольники abd и bfc будутъ подобны; ибо уголъ $bca = bda$ (91), уголъ $fbc = abd$ по положенію, по сему и уголъ $bfc =$ углу bad ; чего ради $ad : fc = bd : bc$ (104), при чемъ $bc \times ad = fc \times bd$ (ариф. 222). равнымъ образомъ и треугольникъ abf , подобенъ bdc ; ибо уголъ $baf = bdc$ (91); а придавъ уголъ ebf къ углу abd и къ другому ему равному fbc , будетъ уголъ $abf = dbc$, по сему и уголъ $afb = bcd$.

И такъ для подобства оныхъ треугольниковъ будетъ $ab : bd = af : dc$ (104); при чемъ $ab \times dc = bd \times af$, придай сѣи произведеніе къ первымъ будетъ $bc \times ad + ab \times dc = bd \times fc + bd \times af = (fc + af) ac \times bd = ac \times bd$; слѣдовательно $bc \times ad + ab \times dc = ac \times bd$, то есть прямоугольникъ изъ боковъ bc и ad съ прямоугольникомъ изъ боковъ dc и ab равенъ прямоугольнику изъ діагоналей ac и bd (133).

194. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ abc извѣстны площадь, основаніе ab , и сумма двухъ боковъ $ac + bc$, найтись оныя порознь.

Рѣшен. Въ треугольникѣ acb опиши кругъ egh , No 4
продолжи ca такъ, чтобы al равна была bh , при чемъ будетъ cl равна полсуммѣ боковъ $ac + cb + ab$,
также $ag = ah$ (155), по сему $ab = lg$, котору
вычти изъ полсуммы боковъ cl треугольника abc ,
останется $gc = ce$. Площадь треугольника acb
раздѣли на полсуммы боковъ, то есть на cl частное
будетъ $=$ радиусу $gd = de$ (155). Въ прямоуголь-
номъ треугольникѣ egd сыщи діагональ cd и перпенди-
куляръ gr , а по извѣстной g и gc прямоугольнаго
треугольника gcr сыскавши высоту cr , умножь ону
на $\frac{1}{2}ge = gr$; произведеніе будетъ равно площади
треугольника gac , которой съ треугольникомъ acb
имѣетъ общій уголъ c ; и для того площадь тре-
угольника gac содержится къ площади треугольни-
ка acb , какъ прямоугольникъ изъ gc и ce или gc
къ площади прямоугольннка изъ боковъ ac и bc (166);
а напоследокъ по извѣстной площади сего прямо-
угольника, и суммѣ боковъ $ac + bc$ сыщутся оныя
порознь (176).

195. Олредѣлен. Ежели кака нибудь линія,
раздѣлился на двѣ части такъ, что одна часть
будетъ

будетъ средняя пропорціональная между другою частію и цѣлою линіею, тогда говорится что оная линія раздѣлена по наружной посредственной пропорціи.

196. ЗАДАЧА. Данную линію ab раздѣлитъ по наружной посредственной пропорціи.

№ 5 Рѣшен. Изъ точки b на концѣ линіи ab поставь перпендикуляръ $bc = ab$, раздѣли ab на двѣ равныя части въ точкѣ d , точки d и c , соедини прямою линіею dc . Изъ точки d радіусомъ dc опиши дугу cf , пока съ продолженною ab пересѣчется въ точкѣ f , потомъ изъ точки b радіусомъ bf опиши дугу fm ; копорая перпендикулярную $bc = ab$ раздѣлитъ въ точкѣ m по наружной посредственной пропорціи такъ, что будетъ $bc : bm = bm : mc$.

Доказ. Изъ точки d радіусомъ dc опиши дугу cgk пока съ продолженною ab пересѣчется въ точкѣ k , при чемъ будетъ $af = bk$. Ибо $df = kd$ радіусы, и $db = ad$ по рѣшенію, и такъ $(df + ad)af = (kd + db)bk$; по сему прямоугольникъ изъ линій bk и bf или bm равенъ прямоугольнику изъ линій af и bf или fe (119) $= bc^2$ (171), отъ коихъ по оппозитій общаго прямоугольника am , останется прямоугольникъ $gm = bm^2$, то есть $(gc) bc \times mc = bm^2$; чего ради $bc : bm = bm : mc$ (ариф. 251) слѣдовательно линія bc равная данной ab раздѣлена въ точкѣ m по наружной посредственной пропорціи.

Другимъ образомъ.

Ф. Изъ точки b на концѣ данной линіи ab , поставь перпендикулярную $bc = \frac{1}{2} ab$, потомъ изъ точки c радіусомъ bc опиши кругъ bde , чрезъ точку a и центръ круга c проводи линію ad ; на послѣдокъ едѣлай

сдѣлай $af = ae$; при чемъ линія ab въ точкѣ f раздѣлится по наружной посредственной пропорціи такъ, что $ab : af = af : fb$.

Доказ. Понеже $ae : ab = ab : ad$ (185), также $ab - ae : ad - ab = ae : ab$ (ариф. 228); но $ab = ed$ и $af = ae$ по рѣшенію; чего ради будетъ $ab - af : ad - ed = af : ab$, то есть $bf : (ae) af = af : ab$, ч. д. н.

Слѣдств. Изъ перваго доказательсва видно, что $bk : bc = bc : bf$ (172); но $bk = af$ и $bc = ab$; того ради $af : ab = ab : bf$, слѣдовательно линія af въ точкѣ b раздѣлена по наружной посредственной пропорціи. Тожъ самое видно изъ втораго доказательства, что $ae : (ab) ed = (ab) ed : ad$; посему и ad въ точкѣ e раздѣлена по наружной посредственной пропорціи.

ф.
145

ф.
146

О П РА В И Л Ь Н Ы Х Ъ Ф И Г У Р А Х Ъ.

197. Олредѣл. Правильныя фигуры суть тѣ, у которыхъ всѣ бока ab, bc, cd и пр. и углы eab, abc, bcd , и проч. равны, какъ на пр. $abcde$. А въ противномъ случаѣ называются неправильными.

ф.
147

198. Олредѣл. Уголъ многоугольника (полигона) есть пошъ, которой заключается боками ab и bc того жъ многоугольника, какъ уголъ abc .

199. ТЕОРЕМА. Около всякаго правильного многоугольника кругъ описанъ быть можетъ.

Доказ.

Доказ. Положимъ что фигура $abcde$ есть правильной пятиугольникъ. Уголъ abc сего многоугольника : равно иближайшій къ нему bcd раздѣли на двѣ равныя части линѣями bf и cf , изъ почкѣ f проведи af , fe и fd ; будетъ треугольникъ $afb = bfc$; ибо уголъ $abf = fbc = fcb$ по рѣшенію, бокъ $ab = bc$, и fb общій бокъ; по сему $af = fc$ (30) $= fb$ (33). Уголъ $fcb = fba = fab = \frac{1}{2}bae$; также треугольникъ $aef = afb$, потому что уголъ $fae = fab$, бокъ $ab = ae$, af общій бокъ, того ради $fb = ef = fc$. Такимъ же образомъ докажется что линѣя $ef = fd$ и $= fc$; слѣдовательно изъ точки f радіусомъ fa по точкамъ a, b, c, d, e , опишется кругъ (8).

Слѣдст. I. Когда въ правильномъ многоугольникѣ каждой уголъ полигона eab, abc, bcd и проч. раздѣлятся пополамъ и проведутся линѣи af, bf, ef , и проч. то онѣя соединяющія въ цѣнпрѣ правильного многоугольника; и многоугольникъ раздѣлился на столько равныхъ между собою треугольниковъ, сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ.

Слѣдст. II. Изъ чего видно, что для начерченія правильнаго многоугольника въ кругѣ, должно окружность онаго раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ; ибо равнымъ хордамъ ab, bc, cd, ed и ae равныя дуги

дуги соотвѣпствуютъ , и углы около точки f на равныхъ дугахъ стояще , суть равны между собою.

Слѣдств. III. Когда изъ центра f на каждой бока правильного многоугольника , опускаются перпендикуляры fg , fh и проч: то оныя въ разсужденіи равныхъ треугольниковъ afb , bfc и проч. будутъ равны: слѣдовательно есѣли одинъ изъ сихъ перпендикуляровъ возьмется за радіусъ , то впишется въ многоугольникъ кругъ $ghikl$; котораго окружность коснется боковъ правильного многоугольника не прорѣзывая оныхъ (84).

200. Опредѣлен. Уголъ центра правильного многоугольника есть тотъ , котораго бока af и bf радіусы проведенные изъ центра къ концамъ какова нибудь бока многоугольника , какъ afb .

201. ТЕОРЕМА. Во всякомъ правильномъ многоугольникѣ , уголъ центра afb съ угломъ полигона abc , равны двумъ прямымъ угламъ или 180 град.

Доказ. Іе. Понеже уголъ $fab = fbc$ (199) посему уголъ $(abf + fbc) abc =$ углу $fab + abf =$ углу abc многоугольника , придай къ симъ угламъ , уголъ afb коего верхъ при центрѣ , то будетъ $abc + afb = fab + abf + afb = 180$ град. (53); слѣдовательно уголъ полигона abc съ угломъ

центра $afb =$ двумъ прямымъ угламъ или 180 градусамъ.

2е Бокъ $ab = bc$ по сему дуга $ab = bc$, уголъ же при центрѣ afb измѣряется дугою ab (13), то есть половиною дуги abc ; также уголъ abc многоугольника, коего верхъ при окружности измѣряется половиною дуги $aedc$ (91), по сему уголъ abc съ угломъ afb измѣряются половиною окружности круга которая $=$ двумъ прямымъ угламъ или 180 град.

Слѣдст. I. Изъ сего видно, что наружной уголъ cbm , правильного многоугольника, равенъ углу afb при центрѣ; ибо уголъ $abc + afb = 180$ град. и уголъ $abc + mbc = 180$ град. по сему уголъ $abc + afb = abc + mbc$, а по опнятіи угла abc останется $afb = mbc$.

Слѣдст. II. Всякаго правильного многоугольника уголъ центра afb същется, когда 360 град. на число боковъ многоугольника раздѣлится, по тому что ихъ столько на окружности находится; слѣдовательно сколько разъ уголъ центра содержаться будетъ въ 360 град. столько многоугольникъ боковъ имѣетъ.

Слѣдст. III. Уголъ abc многоугольника същется, когда уголъ центра afb изъ двухъ прямыхъ угловъ или 180 град. вычтется.

202. ЗАДАЧА. По данному углу полигона $167\frac{1}{2}$ град. правильного многоугольника; сыскать число боковъ онаго.

Рѣшен. Уголъ полигона $167\frac{1}{2}$ град. вычпи изъ 180 град. получишь уголъ центра $12\frac{1}{2}$ (201) ; попомѣ на сей уголъ раздѣли 360 град. частное 28 будетъ число боковъ многоугольника.

Доказ. Понеже частное число 28 , показываешь число равныхъ дугъ находящихся на окружности круга ; следовательно 28 хордъ полагаемыхъ на равныхъ дугахъ окружности круга , опредѣляющъ правильной многоугольникъ (199).

203. ТЕОРЕМА. Радіусъ ac всякаго круга , равенъ боку шестіугольника вписаннаго въ томъ же кругѣ.

Доказ. Сдѣлай хорду ab равну радіусу ac , проведи bc , при чемъ произойдетъ ф. $\triangle acb$ равносѣторной (26) , 143. коего уголъ $acb = 60$ град. следовательно дуга adb шестая часть окружности , и хорда ab равная радіусу ac , есть бокъ шестіугольника $abefgh$ вписаннаго въ кругѣ.

204. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ abc начертить равносѣторной треугольникъ.

и 2 Рѣшен.

Ф.
149

Рѣшен. Проведи діаметръ cd (80), раздѣли оной на чепырѣ равныя части (102); чрезъ точку g трепій части, проводи ab перпендикулярно къ діаметру cd , потомъ точки b , c и a соединя прямыми линіями ac и bc получишь треугольникъ abc равноспоронной.

Доказ. Проведи радіусъ ae и хорду ad . Треугольникъ aeg будетъ $= agd$, ибо уголъ $age = agd$ прямые и бокъ $eg = gd$ по рѣшенію, ag обоимъ треугольникамъ есть общій бокъ, чего ради $ae = ad$ (30) и равна боку шестіугольника по предъидущей теоремѣ; слѣдовательно дуга ad шестая часть окружности; но дуга $db = ad$ (76), по сему дуга $adb = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ окружности круга, также и дуга $ac = bc$ (76); того ради каждая $= \frac{1}{3}$ окружности круга, слѣдовательно хорды ab , ac , и bc равны между собою (78), и треугольникъ abc есть равноспоронной.

Слѣдст. I. Изъ начертанія равноспороннаго треугольника abc видно, что радіусъ ae или ce есть двѣ трети перпендикуляра cg ; слѣдственно радіусъ ce содержится къ перпендикуляру $cg = 2 : 3$.

205. ТЕОРЕМА. Квадратъ радіуса ae , содержится къ квадрату бока ac равноспороннаго треугольника acb , какъ 1 къ 3 мѣ.

Доказ.

Доказ. Понеже $ad = ae$ и ag перпендикулярна къ cd , по сему квадратъ радіуса ad равенъ прямоугольнику gh , также квадратъ бока ac равенъ прямоугольнику gk (144. 172); прямоугольникъ же $gh: gk = dg: gc$ (139): но $dg: gc = 1:3$ (204), слѣдовательно квадратъ радіуса ad или ae къ квадрату бока ac содержишся какъ 1 къ 3 мѣ.

Слѣдст. Изъ сего слѣдуетъ, что квадратъ перпендикуляра cg , содержишся къ квадрату бока ac , какъ $3:4$; ибо $cg: ac = cg: cd$ (181) $= 3:4$ (204). Также и квадратъ бока ac къ квадрату діаметра cd какъ $3:4$; потому что квадратъ бока ac равенъ прямоугольнику ci ; но прямоугольникъ $ci: ch = cg: cd$ (139) или $3:4$ (204); по сему $ac: cd = 3:4$ (ариф: 229).

206. ЗАДАЧА. По известному радіусу ae равностороннаго треугольника abc , сыскать бокъ ab .

Рѣшен. Умножь радіусъ ae квадратно, попомѣ сию площадь умножь чрезъ три, получишь площадь квадрата изъ бока ab (205), изъ котораго извлеки корень получишь бокъ ab .

Или раздѣля радіусъ $ae = ed$ на двѣ равныя части, получишь eg (204), а по известной ae и eg сыщется ag (147), наконецъ $ag \times 2 = ab$.

Слѣдств. Когда данъ будетъ бокъ ab : то радиусъ ae равностороннаго треугольника сыщется, ежели бокъ ab умножится квадратно, и площадь онаго раздѣлится на три части; квадратной корень сего частнаго будетъ равенъ радиусу ae . Или раздѣли бокъ ab на двѣ равныя части получишь ag ; на послѣдокъ по извѣстной ag и ac сыщется высота cg (146), двѣ трети сей высоты cg будетъ $=ce=ae$ (204).

207. ЗАДАЧА. По высотѣ cg равностороннаго треугольника abc ; найти бокъ ab .

Рѣшен. Отъ высоты cg , возми $\frac{2}{3}$ получишь радиусъ ce (204), а по извѣстному радиусу, по предѣдущей задачѣ сыщется бокъ ab .

Или умножа cg квадратно сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ 3 : 4 такъ квадратъ высоты cg , будетъ содержаться къ квадрату бока ab , изъ площади сего, извлеки квадратной корень получишь бокъ ab (204).

208. ЗАДАЧА. Около даннаго круга abc начертить равносторонной треугольникъ.

Рѣшен. Начерти сперва въ данномъ кругѣ равносторонный треугольникъ efd , потомъ ф.150 изъ центра g проводи радиусы ag , bg и gc перпендикулярно къ бокамъ треугольника efd (41), чрезъ точку a проводи
линію

линію kh перпендикулярно къ радіусу ga .
Продолжи ge и gf , пока пересѣкутся съ
перпендикулярною kh въ точкахъ k и h ;
потомъ изъ точекъ k и h , чрезъ концы c
и b радіусовъ gc и gb проводи ki и hi , кои
взаимно пересѣкшись опредѣляшъ равно-
сторонной преугольникъ khi .

Доказ. Понеже уголъ $agk = kgc$ рав-
ными дугами ae и ec измѣряются, $cg = ag$
радіусы, и kg есть общій бокъ преуголь-
никамъ agk и cgk , по сему оные преуголь-
ники равны между собою (30); слѣд-
ственно уголъ $gak = gck$ прямые. Такъ
же докажется что и уголъ gbh есть
прямой, по сему линіи ki и hi касаются
круга въ точкахъ c и b (84). но въ
четвероугольникахъ $pgne$ и $agck$, углы
 gak и gpe также gck и gne прямые по рѣ-
шенію, и уголъ agc есть общій, по сему
уголъ $k = e$; равнымъ образомъ докаже-
тся что и уголъ $f = h$ и $d = i$; но углы
 e, d, f равны между собою; того ради и
углы k, h и i равны, по сему и бока hk ,
 ki , hi равны (55), слѣдовательно пре-
угольниикъ khi равносторонной (26).

Слѣдст. Изъ сего видно, что бокъ hk
описаннаго преугольника hki вдвое больше
бока ef вписаннаго преугольника efd въ
томъ же кругѣ; ибо въ разсужденіи по-
добства преугольниковъ egf и kgh буденъ
 $gp : ga = ef : kh$; но ga вдвое больше gp (204),
слѣдовательно kh вдвое больше ef .

209. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ $abcd$ начертить квадратъ.

№ 6 Рѣшен. Сыскавъ центръ круга (80), ф.151 проводи діаметръ ab , потомъ чрезъ центръ g проводи другой cd перпендикулярно къ первому ab ; на концѣхъ точки a, d, b и c соедини прямыми линіями ad, db, bc , и ca будетъ фигура $abcd$ квадратъ.

Доказ. Понеже углы около центра g суть прямые по рѣшенію, чего ради хорды ad, db, bc и ca опредѣленные равными дугами равны между собою, также и углы a, d, b, c , по (91) прямые; слѣдовательно фигура $abcd$ есть квадратъ (27).

210. ТЕОРЕМА. Квадратъ радіуса gd , равенъ половинѣ квадрата $adbc$ вписаннаго въ кругѣ $abcd$.

Доказ. Квадратъ радіуса $gd =$ треугольнику adb (131): но треугольникъ $adb =$ половинѣ квадрата $adbc$ (127) слѣдовательно квадратъ радіуса dg есть половина квадрата $adbc$.

211. ЗАДАЧА. Около даннаго круга $adbc$ описать квадратъ.

Рѣшен. Проведя два діаметра ab и cd перпендикулярно себя пересѣкающіе, чрезъ концы a, d, b и c сихъ діаметровъ проводи линіи ih, ie, ef и fh перпендикулярно къ

къ діаметрамъ ab и cd , кои взаимнымъ пересѣченіемъ въ точкахъ i , e , f и h опредѣляющъ требуемой квадрапъ $efhi$

Доказ. Понеже $ab = ie = hf$, и $(ab)cd = ih = ef$, по сему $ie = hf = ih = ef$; шакже всѣ углы i , e , f и h прямые по рѣшенію; слѣдовательно чепвероугольникъ $efhi$ есть квадрапъ.

212. ТЕОРЕМА. Квадратъ діаметра ab круга $abdc$, вдвое квадрата $adbc$ вписаннаго въ томъ же кругѣ.

Доказ. Понежс преугольникъ $abd =$ половинѣ прямоугольника ae , шакже и преугольникъ $abc =$ половинѣ прямоугольника af (129); слѣдовательно квадрапъ $adbc$ равенъ половинѣ квадрата $iefh$.

213. ТЕОРЕМА. Ежели радіусъ bc круга $abct$, раздѣлится по наружной посредственной пропорціи, то средняя будетъ равна боку правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ томъ же кругѣ.

Доказ. Положимъ что хорда $ab =$ боку десяти- ф. 152
угольника, чего ради уголъ acb при центрѣ будетъ имѣть 36 град. (201); по сему каждой уголъ cab и abc равенъ $\frac{180 - 36}{2} = 72$ град. (201). Раздѣли уголъ bac на двѣ равныя части линіею ad , преугольникъ adb будетъ подобенъ abc . Ибо уголъ $dab = \frac{72}{2} = 36$ град. $=$ углу acb , уголъ abc общій, по сему и уголъ $adb = bac$ (53); чего для $db : ab = ab : bc$ (104); но уголъ $cab = abc = adb$, и уголъ $dab = dac = acb$, по сему и бокъ $ab = ad = cd$ (55); И шакъ въ пропорціи поспавя cd вмѣсто ab , будетъ db

И 5

$ab : cd = cd : bc$; слѣдовательно радиусъ bc линіею ad раздѣленъ въ точкѣ d , по наружной посредственной пропорціи (195), и средняя $cd =$ боку ab , десятиугольника вписаннаго въ ономъ кругѣ.

Слѣдств. Ежели какая нибудь линія раздѣлится по наружной посредственной пропорціи, и начертится равнобедренный треугольникъ такимъ образомъ, что средняя возьмется за основаніе, а вся линія за наклоненной бокомъ, то онаго уголъ при основаніи будетъ вдвое угла верхняго.

214. ЗАДАЧА. На данной линіе ab начертить правильной пяти и десятиугольникъ.

Рѣшен. На концѣ данной линіи ab поставь перпендикуляръ $be = ab$, раздѣли ab въ точкѣ d пополамъ, проводи de , изъ точки d радиусомъ de опиши дугу ec , которая съ продолженною ab пересѣчется въ точкѣ c . На основаніи ab начерти равнобедренный треугольникъ, котораго бы бока ag и bg равны были ac . Около сего треугольника опиши кругъ (81); по окружности котораго линія ab положишься пять разъ; и чрезъ то начертится правильной пятиугольникъ $abfgh$. Для начертанія правильной десятиугольника, изъ верха g радиусомъ ga или gb опиши кругъ abk , по окружности котораго нанеси данной бокомъ ab десять разъ, будешь имѣть правильной десятиугольникъ.

Доказ. Понеже ac равная ag раздѣлена въ точкѣ b по наружной посредственной пропорціи (196), и ab есть средняя пропорціональная между ac и bc ; посему равнобедренный треугольникъ abg есть такой, котораго равные углы bag и abg при основаніи вдвое верхняго угла agb (113); слѣдовательно уголъ $agb = 36$ град. чего ради будетъ, те проводя изъ центра

центръ *m* описаннаго круга радиусы *am* и *bm*,
 уголъ *amb* при центрѣ $\equiv 72^\circ$ град. $(91) \equiv \frac{1}{5}$ отъ 360 град.
 по сему дуга *ab* измѣряющая уголъ *amb* $\equiv \frac{1}{5}$ час-
 ти а дуга *ahgfb* $\equiv \frac{4}{5}$ окружности круга; но дуга
ahg \equiv *gfb*, по сему каждая изъ нихъ $\equiv \frac{2}{5}$ окруж-
 ности; того ради данная линія *ab* какъ на дугѣ
ahg, такъ и на дугѣ *gfb* положится два раза, а
 по всей окружности *abfgh* пять разъ, слѣдовательно
 фигура *abfgh*, есть правильной пятиугольникъ (199).
 2е уголъ *agb* $\equiv 36^\circ$ град. по сему дуга *ab* есть де-
 сятая часть окружности круга *abikl*, слѣдственно
 данная *ab*, положится по окружности онаго десять
 разъ, и фигура *abikl*; есть правильной десяти-
 угольникъ, (199).

Слѣдст. I. Когда изъ верха *g* правильного пяти-
 угольника *abfgh* проведутся діагонали, *ag* и *bg*, то
 произойдетъ равнобедренной треугольникъ *abg*,
 котораго уголъ *gab* или *abg* при основаніи вдвое
 верхняго угла *agb*; ибо уголъ *amb* при центрѣ вся-
 каго правильного пятиугольника $\equiv 72^\circ$ град. по
 сему уголъ *agb* $\equiv 36^\circ$ град. слѣдовательно уголъ *gab*
 $\equiv \frac{1}{2}(180 - 36) \equiv 72^\circ$ град. будетъ вдвое больше *agb*.

Слѣдств. II. Изъ предыдущей теоремы и за-
 дачи явствуетъ, когда діагональ *ag* равная *ac* пра-
 вильнаго пятиугольника, раздѣлится по наружной
 посредственной пропорціи, то средняя будетъ \equiv
 боку *ab* пятиугольника *abfgh*.

215. ТЕОРЕМА. Квадратъ бока *ab* пяти-
 угольника *ablm* равенъ суммѣ квадратовъ
 бока *bg* шестугольника, съ квадратомъ бо-
 ка *ac* правильнаго десятиугольника вли-
 ченныхъ въ одномъ кругѣ.

Доказ.

Ф.
154

Доказ. Положимъ что хорда ab , есть бокъ
 правильного пятиугольника. Изъ центра g на хорду
 ab опуски перпендикуляръ gc , попомъ проводи хор-
 ду ac , на которую также опуски перпендикуляръ
 gd . Треугольники bge и agb будутъ подобны; ибо
 уголъ abg общій, уголъ $egb = gab = 54$ град. по
 тому что дуга $bc = 36$ град. и дуга $dc = 18$
 град. по сочиненію (76), и такъ дуга $bc + dc$
 $= 54$ град. $=$ углу $egb =$ половинѣ угла
 полигона пятиугольника, то есть $\frac{1}{2} (180 - 72)$;
 $= 54$ град. $=$ углу gab , и уголъ $beg = bga$ (53);
 чего ради $eb : bg = bg : ab$ (104), при чемъ
 $ab \times eb = bg^2$. Треугольникъ $aed = dec$, поелику ad
 $= dc$ (76), уголъ $ade = cde$ прямые, de общій бокъ,
 по сему уголъ $eac = eca$ (30). уголъ же $eac = abc$
 въ равнобедренномъ треугольникѣ abc (32), по сему
 уголъ eca треугольника $aec =$ углу abc треуголь-
 ника bac (ариф. 30), и уголъ cab у сихъ треуголь-
 никовъ общій, по сему и уголъ $aec = acb$ (53), слѣд-
 ственно треугольникъ abc подобенъ aec (103); иного
 ради $ae : ac = ac : ab$ (104), при чемъ $ab \times ae = ac^2$;
 а придавъ сіи части, къ частямъ перваго уравне-
 нія, будетъ $bg^2 + ac^2 = (ab) \times eh \times eb + (ab) \times eh \times ac$
 $= ab$. ч. д. и.

216. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ $abkn$ на-
 чертитъ правильной пяти и десятиуголь-
 никъ.

Ф. 155

Рѣшен. Радіусъ bf раздѣли по наружной по-
 средственной пропорціи въ точкѣ i (196), средняя bi
 будетъ равна боку десятиугольника (213); попомъ
 изъ точки g радіусомъ gb опиши дугу be , точки b
 и e соедини прямою линіею be , которая будетъ равна
 боку пятиугольника. И такъ положи показанныя
 линіи по окружности даннаго круга, произойдушъ
 требуемые многоугольники.

Доказа.

Доказ. Понеже средняя $bi = bc = bl =$ боку десятиугольника (196): также $\overline{bf}^2 + \overline{fe}^2 = \overline{be}^2$ но $bf =$ боку шестиугольника, ef есть бокъ десятиугольника; ибо $gb = ge$ и $gc = gf$ радиусы, по сему $gb - gc = ge - gf = bc = bi = ef$; по сей причинѣ \overline{be}^2 равенъ квадрату бока пятиугольника вписаннаго въ томъ же кругѣ (215); слѣдовательно хорда $be = bd$ равна боку пятиугольника.

217. ТЕОРЕМА. Квадратъ дѣгонали ai съ квадратомъ бока ab правильного пятиугольника abi , влѣтеро больше квадрата радиуса ag .

Доказ. Изъ верха i на основаніе ab опусти перпендикуляръ ic , которой пройдя чрезъ центръ g раздѣлитъ бокъ ab на двѣ равныя части (76), проведенная хорда ac будетъ равна боку десятиугольника. Для прямоугольнаго треугольника aci , будетъ $\overline{ac}^2 + \overline{ai}^2 = \overline{ci}^2$: но $ci = 2cg$, по сей причинѣ $\overline{ci}^2 = 4cg^2$, также $\overline{ab}^2 = \overline{gc}^2 + \overline{ac}^2$ (215). И такъ сложа части перваго равенства съ частями втораго, будетъ $\overline{ac}^2 + \overline{ai}^2 + \overline{ab}^2 = 5gc^2 + \overline{ac}^2$, наконецъ отнявъ отъ обѣихъ частей \overline{ac}^2 , будетъ $\overline{ab}^2 + \overline{ai}^2 = 5cg^2 = 5ag^2$, слѣдовательно сумма квадратовъ дѣгонали ai съ квадратомъ бока ab влѣтеро больше квадрата радиуса ag правильного пятиугольника abi .

218. ЗАДАЧА. По известному боку ab сыскать дѣгонали ag , и радиусъ at правильного пятиугольника agb .

Рѣшен. и доказ. Данной бокъ ab раздѣли по ф. 156 наружной посредственной пропорціи (196), придай

къ оному среднюю bc получишь $ab + cb = ac =$ дѣогонали ag (214), копорая сыщется слѣдующимъ образомъ: въ прямоугольномъ треугольникѣ dbe , по извѣстной $db = \frac{1}{2}ab$ и $be = ab$ сыщется $de = dc$ (146), и $dc + ad = ac =$ дѣогонали $ag = bg$; потомъ умножь дѣогональ ag квадратно, и боки ab квадратно, сумму сихъ квадратовъ раздѣли на 3 равныхъ частей, частное будетъ равно площади квадрата изъ радиуса am (217), изъ коего извлечи квадратной корень получишь радиусъ am .

Или по извѣстной ag и ad сыщи dg (147); потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію, $dg : ag = ag :$ къ диаметру gn (172. слѣд.), копорой раздѣля пополамъ получишь радиусъ $gm = am$.

Слѣдст. Когда потребуется по данной дѣогонали ag найти боки ab ; тогда дѣогональ $ag = ac$ раздѣли по наружной посредственной пропорціи, средняя будетъ — боку ab пятиугольника (214).

219. ЗАДАЧА. По извѣстному радиусу ag , правильного пятиугольника $abcde$; сыскать онаго боки ae .

Рѣшен. и Доказ. Радиусъ ag раздѣли по наружной посредственной пропорціи (196), средняя ah будетъ равна боку am десятиугольника (213) вписаннаго съ пятиугольникомъ въ одномъ кругѣ, копорой сыщется слѣдующимъ образомъ: въ прямоугольномъ треугольникѣ afk , по извѣстнымъ $af = \frac{1}{2}ag$, $ak = ag$ найдемся $kf = hf$ (146), изъ копорой вычши af останется $ah = am$, потомъ умножь am квадратно и радиусъ ag квадратно, площади сихъ квадратовъ сложа вмѣстѣ извлечи корень квадрата получишь боки ae пятиугольника $abcde$ (215).

Или сыскавъ боки десятиугольника am , сдѣлай слѣдующую пропорцію, $2ag$ или $ct : am =$
 am

$am : mt$ (172), потомъ по извѣстной mt и am сыщи ap (147); на конецъ удвоя оную получишь бокъ ae даннаго пятиугольника,

220 ТЕОРЕМА. Въ правильномъ пятиугольникѣ $abfgh$, дѣгоналъ ag есть средняя пропорціональная между бокомъ ad и суммою ихъ $ab + ag$.

Доказ. Понеже $ac = ag$ и при томъ $bc : ab =$ ф.156
 $ab : ac$ или ag . (196); чего ради $ab : (ab + bc) ac$
или $ag = (ac) ag : ab + ag$, то есть $ab : ag$
 $= ag : ab + ag$ (ариф.228) ч. д. н.

Слѣдст. Изъ сего видно, ежели какая нибудь линѣя раздѣлился по наружной посредственной пропорціи, то средняя будетъ дѣгоналъ, а меньшая бокъ правильнаго пятиугольника.

221. ЗАДАЧА. Въ правильномъ пятиугольникѣ $abcde$ дѣгоналъ ac съ бокомъ ae вообще извѣстны, сыскать оныя порознь.

Рѣшен. Проведя линѣю $ah = ac + ae$ раздѣли ф.157
оную по наружной посредственной пропорціи (196). и 158
Средняя $hd = gh$ будетъ равна дѣгонали ac (220);
которая по (218) сыщется; а наконецъ изъ суммы
 $ac + ae$ вычши ac остатокъ будетъ $=$ боку ae
пятиугольника $abcde$.

222. ЗАДАЧА. По данной высотѣ cf , правильнаго пятиугольника $abcde$, сыскать онаго бокъ ae .

Рѣшен. и доказ. Данную высоту cf раздѣли по ф.159
наружной посредственной пропорціи (196). Изъ точки f радиусомъ fi опиши дугу ig , а изъ точки c высотой cf опиши другую дугу fg кои взаимно пересѣкутся

сѣкущая въ точкѣ g , проводи линіи gc и gf , будешь треугольникъ gfc , коего уголъ $gcf = 36$ град. а уголъ $gfc = 72$ град. (213); чего ради треугольнику ace подобенъ (213). И такъ сыскавши среднюю пропорціональную fi (218) $= fg$, раздѣли оную на двѣ равныя части получишь $pg = pf$ (32); потомъ по извѣстнымъ pf и fc сыщется cp (147), и для подобія треугольниковъ gfc и ace будетъ $cp : cf = gf : kb$ боку ae (104).

223. ЗАДАЧА. На данной линіе ab , начертить правильной осмѣугольникъ.

Рѣшен. Данную линію ab , раздѣли на ф.160 двѣ равныя части въ точкѣ c , изъ которой на ab поставь перпендикуляръ $cd = \frac{1}{2}ab$, проводи ad , опредѣли $de = ad$, изъ точки e радиусомъ ae опиши кругъ abf ; по окружности онаго положи данную ab начертится требуемой осмѣугольникъ.

Доказ. Ибо $ac = cd$ по рѣшенію, по сему уголъ $cda = cad = 45$ град. (53); уголъ $cda = dea + dae$ (53), но уголъ $dea =$ углу dae противъ равныхъ боковъ ad и de ; чего ради уголъ $dea = \frac{1}{2}$ угла adc , и такъ уголъ $acb = adc = 45$ град. $= \frac{360}{8}$; по сему дуга $ab = \frac{1}{8}$ части окружности круга; слѣдовательно хорда ab по окружности онаго положится 8 разъ, при чемъ произойдетъ фигура $abgfh$ правильной осмѣугольникъ.

Примѣч. Для начертенія на данной линіе ab правильного 16 ши $=$ угольника, должно

должно еще опредѣлить $ef = ae$, попомъ изъ почки f , радиусомъ af описатьъ кругъ, по окружности котораго данная ab положится 16 разъ, и проведенныя по симъ почкамъ равныя хорды, опредѣляющъ правильной 16ти угольникъ. Ибо уголъ $afb = \frac{1}{2}$ угла aeb (91) $= 22\frac{1}{2}$ град. $= \frac{360}{16}$, слѣдовательно дуга $ab = \frac{1}{16}$ части окружности круга радиуса fa .

224. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ abd , начертить правильной осми и шестнадцати угольникъ.

Рѣшен. Проведи діаметръ ab , изъ центра онаго поставь перпендикуляръ cd , почки d и b соедини прямою линіею db , Ф. 161 на которую изъ центра c опусти перпендикуляръ ce . Хорда ed будетъ бокъ осмиугольника. На сей бокъ ed опусти перпендикуляръ em , хорда dm будетъ бокъ шестнадцатиугольника.

Доказ. Понеже дуга $dmeb$ есть четвертая часть окружности круга, и дуга $dme = \frac{1}{2}$ дуги $dmeb$, по сему $dme = \frac{1}{8}$ части окружности, и хорда de есть бокъ осмиугольника. Дуга $dmt = \frac{1}{2}$ дуги dme (76), по сему $dmt = \frac{1}{16}$ части окружности, слѣдовательно хорда $dm =$ боку шестнадцатиугольника.

225. ЗАДАЧА. По высотѣ ek , правильного осмиугольника $abgh$; сыскать онаго бокъ ah .

ф. 162 **Рѣшен. и Доказ.** Изъ центра l , опусти на bc и ac перпендикуляры lm и ln , проводи mk , nk и lk , при чемъ будетъ $lm = ln = lk$ (199), и lo перпендикулярна къ mk ; ибо mk параллельна ac , по тому что уголъ $mkl = 45$ град. (53) $=$ углу $akt = qac$ (201); чего ради и уголъ $anl = kol = 90$ град. (48). Также lp перпендикулярна nk ; ибо уголъ $nla = alk$, и уголъ $lnk = lkn$ (32), по сему уголъ $npl = kpl = 90$ град. И шакъ раздѣля высоту ek пополамъ, частное будетъ $= lk = ml = ln$, по извѣстнымъ ml и lk прямоугольнаго преугольника mlk същется mk (146), и $\frac{1}{2}mk = mo =$ высотѣ lo (55), которую вычти изъ ln остатокъ будетъ $= no$; потомъ въ преугольникѣ nok по извѣстной no и $ok = \frac{1}{2}mk$ същется nk (146), и $\frac{1}{2}nk = pk$. По извѣстной lk и pk сыщи lp (147), а напоследокъ для побѣства преугольниковъ nlk и alh сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ $lp : lk = nk :$ къ боку ah .

226. ЗАДАЧА. По данной высотѣ ab , правильнаго десятиугольника gh , сыскать онаго боку cd .

ф. 163 **Рѣшен. и доказ.** Изъ центра e на боку ge опусти перпендикуляръ ef , проводи ec и ed , точки b и f соедини прямою линіею fb , при чемъ будетъ преугольникъ $fec = seb$, поелику $be = ef$ (199), $fe = bc$ (76), уголъ $cbe = cfe$ прямые, по сему уголъ $fec = seb = 18$ град. также преугольникъ fne

$fne = neb$, поелику $ef = be$, и не общая, уголъ $fep = neb = 18$ град. слѣдственно уголъ $fne = enb$ прямые, по чему и уголъ $efb = fbe = 72$ град. но какъ уголъ $cef = ceb = bed = 18$ град. по сему уголъ $(fec + ceb)feb = (ceb + bed)ced = 36$ град. и уголъ $ecd = cde = 72$ град. $= fbe = efb$, и треугольникъ fbe подобенъ ced , по сему линия fb будетъ боку десятиугольника коего радиусъ $eb = ef$. И такъ половину высоты $ab = eb$ раздѣли по наружной посредственной пропорціи, средняя будетъ боку fb (213); потомъ по известной bf , и боку $be = ef$ сыщется высота ne (154), а на концѣ для подобныхъ треугольниковъ feb и ced будетъ $ne : eb = bf$ къ боку cd (104).

227. ЗАДАЧА. На данной линіе ab , начертить правильной двенадцатиугольникъ.

Рѣшен. На данной ab сдѣлай равно-
споронной треугольникъ abe . Изъ e на бокъ ab опуски перпендикуляръ se , и продолжа
оной опредѣли $ed = ae$, потомъ изъ d радиусомъ ad начерпи кругъ, по окруж-
ности котораго положи данную ab 12 разъ получишь пребуемой двенадцатиуголь-
никъ. Ф. 164

Доказ. Понеже уголъ $aeb = 60$ град. (53), треугольникъ $ase = sbe$, попому что $as = bs$, se общимъ треугольникамъ общимъ бокъ, и уголъ $ase = seb$ прямые, по сему уголъ $aes = seb = \frac{1}{2}$ угла $aeb = 30$ град. $= ead + ead$ (53); но $ed = ae$, по сему уголъ $ead = ead = \frac{1}{2}$ угла $aes = 15$ град. Равнымъ
1 2 обра-

образомъ докажется что и уголъ $cdb = 15$ град. слѣдовательно уголъ $adb = 30$ град. $= \frac{360}{12}$ град. по сему дуга $ab = \frac{1}{12}$ части окружности, чего ради хорда ab , по окружности круга положились 12 разъ; слѣдовательно фигура abf есть правильной двенадцатиугольникъ.

228. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ $acbg$, начертить двенадцатиугольникъ.

Рѣшен. Изъ произвольно взятой на ф. 165 окружности круга точки a , радиусомъ ad опиши дугу, которая бы прорѣзала окружность круга въ точкѣ b , проводи хорду ab , на оную изъ центра d опусти перпендикуляръ dc ; на послѣдокъ проведя хорду ac получишь бокъ желаемого многоугольника.

Доказ. Понеже $ab = bd$ по положенію и равна боку шестіугольника (203); по сему дуга acb шестая часть окружности: но дуга $ac = bc$ (76), того ради дуга ac , есть $\frac{1}{12}$ часть окружности круга, слѣдовательно хорда ac равна боку двенадцатиугольника.

Слѣдст. Изъ того видно, когда изъ центра d , на бокъ ac двенадцатиугольника опустится перпендикуляръ df , и проведется хорда af , то она будетъ бокъ дванадцати четырехъ-угольника; а продолжая такимъ образомъ дѣленіе дугъ на

на двѣ части начертился 48 ми и 96 пи угольникъ, и пакъ далѣе.

229. ЗАДАЧА. По данной высотѣ ab правильного двенадцатиугольника $cdbk$ сыскать бокъ dc .

Рѣшен. Изъ центра g на бока ef и ed ф. опуски перпендикуляры gi и gh , проводи 166 ge , gd и gc , точки i , h и a соедини прямыми линіями ai и ah , будетъ $gi = gh = ag$ (199). Треугольникъ agi есть равноспоронной, пошому что уголъ $dga = egi = agc = 15$ град. уголъ $egd = 30$ град. по сему уголъ $agd + dge + egi =$ углу $agi = 60$ град. и уголъ $aig = gai = 60$ град. и пакъ уголъ $gan - gai = ian = 30$ град. $= edn$ (201. слѣд.) ; слѣдственно ed параллельна ia , уголъ $dhg = alg$ прямые (48), и gl перпендикулярна къ ai ; по сей причинѣ уголъ $igh = agh = 30$ град. $= dgc$ и уголъ $hag = gha$ (32) $= gcd = cdg$, слѣдовашельно треутольникъ agh подобенъ dgc . И пакъ раздѣля высоту ab пополамъ частное будетъ $ag = gi = ai = gh$. Въ равноспоронномъ треутольникѣ agi по извѣстнымъ бокамъ сыщется перпендикулярная gl , $gh - gl = hl$, и $\frac{1}{2} ai = al$. По извѣстнымъ al и hl треутольника alh сыщется ah (146), которую раздѣля пополамъ получишь $am = \frac{1}{2} ah$; попомъ въ треутольникѣ agh сыщется высота gm (154), а напоследокъ для подобія тре-

угольниковъ agh и dgc будетъ $gm : ag = ha : kb$ боку dc (104).

230. ЗАДАЧА. Въ данной кругъ начертить правильной пятнадцатигульникъ.

Ф.157 Рѣшен. Сперва начерти въ кругъ равносторонный треугольникъ abc (204), потомъ правильный пятиугольникъ $cdefg$ (216), проводи хорду ae , которая будетъ бокомъ требуемаго пятнадцатигульника.

Доказ. Понеже дуга $cda = \frac{1}{3}$ а дуга $cde = \frac{2}{5}$ окружности круга по рѣшенію: но $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$, то есть дуга cde безъ дуги $cda =$ дугѣ $ae = \frac{1}{15}$ части окружности круга; слѣдовательно хорда ae есть бокомъ пятнадцатигульника (199).

231. Предъувѣдомленіе. Выше уже говорено, что если ли потребуется въ кругъ начертить правильной многоугольникъ, то надлежитъ окружность онаго раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько боковъ фигура имѣть должна: но какъ не имѣемъ еще способа геометрическаго, то есть помощію линѣйки и циркуля, окружность круга дѣлить на столько равныхъ частей на сколько кто желаетъ, слѣдственно не всякой многоугольникъ въ данномъ кругѣ описать можно; для чего предлагается здѣсь способъ какъ начертить кривую линію называемую *квадрантъ* дѣностратовъ (имя изобретателя), по средствомъ котораго дѣлялся углы и дуги круга, на произвольное число равныхъ частей.

232. ЗАДАЧА. Начертить квадрантъ.

Ф.158 Рѣшен. Проведи произвольной длины линію ab , изъ точки a поставь перпендикуляръ $ac = ab$,

и разтвореніемъ ac опиши четверть окружности круга $cgdb$, раздѣли ac равно и дугу $cgdb$ на нѣсколько равныхъ частей, на прим. какъ здѣсь четверть окружности и радіусъ ac раздѣлены на 8 равныхъ частей. Изъ центра a проводи къ точкамъ всѣхъ равныхъ частей четверти круга прямыя линіи ag , ae , ad и проч. опиши точекъ f , k , h и проч. равныхъ частей радіуса ac , проводи въ параллель ab линіи fl , km , hn и проч. кои разрѣжутъ радіусы четверти круга въ точкахъ l , m , n и проч. Чрезъ всѣ сїи точки проводи кривую линію $clmnp$, которая будетъ квадратриксъ.

Слѣдств. Изъ того явствуетъ: 1е, что означенная кривая линія пѣтъ исправитъ начерченный можеть, чѣмъ радіусъ ac и дуга четверти круга болѣе или равныя части дѣлена будетъ; слѣдовательно при означеніи кривой линіи $clmnp$ и чувствительной погрѣшности бытъ не можеть. 2е, ежели изъ произвольно взятой на сей кривой линіи точки n , просянеться линія hn параллельно къ ab , а потомъ раздѣлился hc на нѣсколько равныхъ частей, на прим. на 3 и проведенныя параллельныя линіи fl и km , кои прорѣжутъ кривую линію въ точкахъ l и m , также и чрезъ сїи точки радіусы ag , ae и ad : то дуга cg , будетъ содержаться къ дугѣ cd , какъ линія cf къ линіи ch ; и въ сей-то пропорціи соотвѣтствуетъ свойство сея кривыя линіи.

233. ЗАДАЧА. Данной уголъ bac раздѣлитъ на три равныя части.

Рѣшен. Начерти сперва кривую линію квадратриксъ какъ показано (232), и при оной опиши четверть круга ge , потомъ сдѣлай уголъ gdn — данному bac . Изъ точки o гдѣ бокъ dn угла gdn прорѣзываетъ кривую линію gf , опусти на радіусъ dg перпендикуляръ ok , опрѣзанную симъ перпендику-

ф. 169

дугомъ часть gh раздѣли на три равныя части въ точкахъ i и k (102), отъ сихъ точекъ проведи линіи kl и im параллельно къ ho , кои прорѣжутъ кривую линію въ точкахъ l и m , проводи чрезъ оныя точки радіусы dp и dq , при чемъ дуга gn раздѣлился на три равныя части въ точкахъ p и q

Доказ. Ибо по свойству кривой линіи, $gk : gh = gp : gn$; но $gk = \frac{1}{3}gh$, по сему и дуга gp будетъ равна $\frac{1}{3}$ дуги gn . Что и о прочихъ разумѣть должно.

Примѣч. При раздѣленіи тупаго угла urs на три равныя части, произойти можетъ нѣкоторая неудобность, потому что дуга ux не можетъ содержаться въ дугѣ gne ; въ семъ случаѣ данной уголъ urs раздѣли прежде на двѣ равныя части (46), потомъ половину онаго угла urs раздѣли на три равныя части какъ и прежде въ точкахъ p и q , дуга eq будетъ третья часть дуги em .

234. ЗАДАЧА. Прямой уголъ dab , раздѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Изъ точки a , радіусомъ ab опиши дугу bed , потомъ изъ точки b перенеси радіусъ ab на хорду bc , на которую опусти перпендикуляръ ae , при чемъ прямой уголъ bad , раздѣлился на три равныя части.

Доказ. Понеже уголъ $bac = \frac{2}{3}$ прямого угла; посему уголъ $dac = \frac{1}{3}$ прямого, но какъ уголъ cab линіею ae раздѣленъ на двѣ равныя части, чего ради уголъ $eac = eab = \frac{1}{3}$ прямого угла bad .

235. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ $bdcf$, начертить правильной семіугольникъ.

Рѣшен. Четверть окружности cdb , раздѣли на семь равныхъ частей (233), потомъ отсчитай отъ b до d четыре оныхъ части, проводи хорду bd копорая будетъ бокъ желаемого многоугольника. Ф. 171

Доказ. Понеже каждая изъ сихъ частей есть, 28 я часть окружности; по сему 4 седьмны четверти круга, $= \frac{1}{7}$ части всея окружности тогоже круга, слѣдовательно хорда bd сей дуги, есть бокъ требуемаго семіугольника.

Рѣшен. Другимъ образомъ, сперва въ данномъ кругѣ начерти равносторонный треугольникъ efc . бокъ онаго ef раздѣли пополамъ въ g , половина бока $eg = gf = eh$ будетъ бокъ желаемого семіугольника. Справедливость сего рѣшенія доказана будетъ въ тригонометріи на своемъ мѣстѣ.

Слѣдст. Такимъ образомъ какъ въ первомъ случаѣ показано, начертится въ кругѣ правильной девяти, одиннадцати и болѣе угольникъ; когда четверть окружности раздѣлился на столько равныхъ частей, сколько многоугольникъ боковъ имѣть долженъ, и проведемъ хорда спягивающая четыре части: то она хорда равна будетъ боку желаемого многоугольника.

236. ЗАДАЧА. На данной линіе ab начертить правильной семіугольникъ.

Рѣшен. На данной ab поставь перпендикуляръ $bc = ab$. Изъ точки b радиусомъ ab опиши дугу acd , раздѣли четверть окружности ac на семь равныхъ частей (233), сдѣлай $cd = \frac{3}{7}$ дуги ac , уголъ abd раздѣли на двѣ равныя части линіею be
I 5 (46)

(46), потомъ у точки a сдѣлай уголъ $bae = abe$ (45), изъ точки e радіусомъ ae опиши кругъ, по окружности котораго хорду ab положи семь разъ, получишь требуемой семіугольникъ.

Доказ. Понеже дуга ae имѣетъ 7 а дуга acd 10 равныхъ частей, слѣдовательно дуга ac содержи- ся къ дугѣ acd какъ 7 къ 10; чего ради бу- дешъ $7:10 = 90$ град. (прямой уголъ abc) къ $128\frac{4}{7}$ угла abd (13): но уголъ abd вдвое угла abe и вдвое равнаго ему bae , посему уголъ $abd = abe + bae = 128\frac{4}{7}$; чего ради уголъ $aeb = 180 - 128\frac{4}{7} = 51\frac{3}{7}$; но $51\frac{3}{7} = \frac{360}{7}$, слѣдовательно дуга ab есть седьмая часть окружности круга $abdf$, и хор- да ab положится по оной точно семь разъ (199).

Рѣшен. Другимъ образомъ. На продолженной ab сдѣлай $bc = ab$. начерши на ac равносторонный треугольникъ acd изъ верха a на линію cd опу- сти перпендикуляръ ag , потомъ на данной ab сдѣлай равнобедренный треугольникъ, котораго бы косымъ бока af и bf равны были $\frac{2}{3} ag$, изъ точки f гдѣ бо- ка взаимно пересѣкутся, радіусомъ af опиши кругъ, по окружности котораго бокъ ab положится семь разъ, при чемъ произойдетъ правильный семіуголь- никъ.

Справедливостъ рѣшенія сего задачи доказана бу- детъ въ тригонометріи.

237. ЗАДАЧА. На данной линіе ab , на- чертитъ правильной девятіугольникъ.

Рѣшен. Изъ точки b , на данной линіе ab по- ставь перпендикуляръ $be = ab$ (58), потомъ изъ точки b радіусомъ ab опиши дугу aed , четверть окружности

окружности ae раздѣли на 9 равныхъ частей (233), опредѣли дугу $ed = \frac{e}{9}$ дуги ae , проводи bd , уголъ abd раздѣли линіею bc пополамъ (46), потомъ сдѣлай уголъ $bac = abc$; изъ точки c радиусомъ ac опиши кругъ, по окружности котораго положи линію ab девять разъ, получишь требуемой девятиугольникъ.

Доказ. Понеже дуга ae содержится къ дугѣ ad какъ 9 къ 14, по сему и уголъ $abe : abd = 9 : 14 = 90^\circ : 140^\circ (13)$; но уголъ $abc = dbc = bac$ по рѣшенію, чего ради уголъ $abd = abc + bac = 140^\circ$, по сему уголъ $acb = 40^\circ = 360^\circ$; слѣдственно дуга ab есть девятая часть окружности круга, и хорда ab по окружности онаго положишся девять разъ.

Слѣдст. Такимъ образомъ сыскавъ содержаніе прямого угла къ углу полигона начертаннаго всякой правильной многоугольникъ.

238. ЗАДАЧА. Въ данномъ кругѣ по транспортиру начертить какой нибудь правильной многоугольникъ.

Рѣшен. Положимъ что въ данномъ **№ 7** кругѣ пребудетъ начертанъ правильной ф. девятиугольникъ. Чего ради сыщи уголъ **174** центра девятиугольника (201), потомъ положи транспортиръ такъ, чтобъ центръ онаго находился въ центрѣ круга, а діаметръ его на діаметръ круга, отъ точки e до f отсчитай столько градусовъ сколько уголъ центра имѣть долженъ, потомъ чрезъ замеченную точку f проводи

веди радиусъ ac , хорда bc будетъ бокомъ желаемого многоугольника вписаннаго въ кругъ.

Доказ. Понеже уголъ центра $\frac{360}{9} = 40^\circ =$ углу cab , по сему дуга bc девятая часть окружности; слѣдовательно хорда bc на оной положится девять разъ, при чемъ начертится правильной девятыугольникъ.

239. ЗАДАЧА. На данной линіе ab , по транспортиру начертить какой нибудь правильной многоугольникъ.

Рѣшен. Сыщи сперва уголъ центра ф.175 многоугольника (201), которой вычпня изъ 180° получишь уголъ полигона. Раздѣли оной пополамъ; попомъ положи транспортиръ такъ, чтобъ центръ онаго былъ въ концѣ линіи a , а діаметръ онаго проспирался бѣ по линіе ab , по окружности котораго отъ e до f , отсчитай столько градусовъ сколько половина угла многоугольника въ себѣ заключать должна, по же сдѣлай и уконца b ; попомъ чрезъ замѣченныя точки f и f , проводи линіи ac и bc , изъ точки c радиусомъ ac опиши кругъ, по окружности котораго нанеся хорду ab , получишь требуемой многоугольникъ.

Доказ. Положимъ что на данной линіе ab требовалось начертить правильной осьми-

осмѣугольникъ: то уголъ acb при центръ
 правильного осмѣугольника будетъ $= \frac{360^\circ}{8}$
 $= 45^\circ$ (201), и $\frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 62\frac{1}{2} =$ углу
 $abc = bac$ по рѣшенію, поему уголъ abc
 $+ bac = 135^\circ$ слѣдственно $180^\circ - 135^\circ =$
 $45^\circ =$ углу $acb =$ углу центра осмѣуголь-
 ника; чего ради дуга ab есть осьмая
 часть окружности, и хорда ab по оной
 положится восемьъ разъ.

240. ЗАДАЧА. Около даннаго круга, на
 чертитъ правильной многоугольникъ.

Рѣшен. Въ данномъ кругѣ начерти правильной
 многоугольникъ подобной желаемому, на пр. пяти
 угольникъ $abcde$ (216). Изъ центра f проводи пря-
 мую линію fh перпендикулярную къ боку ab , копо-
 рая оную въ точкѣ g равно и соотвѣтствующую сей
 хордѣ дугу ahb въ точкѣ h раздѣлишь на двѣ рав-
 ныя части; изъ крайнихъ точекъ a и b проводи ра-
 діусы fa и fb , чрезъ точку h продолж радиусы fa и
 fb до i и k , проводи линію ik параллельную къ ab ,
 копорая будетъ бокъ требуемаго многоугольника;
 потомъ продолжи радиусы fe , fd и fc такъ, что бы
 была $fi = fn = fm = fl = fk$; на послѣдокъ
 точки i , n , m , l и k соедини прямыми линіями in ,
 nm , ml и lk произойдетъ желаемой многоугольникъ
 $iklmn$ около круга описанный.

Доказ. Понеже ab параллельна ik , и fh перпен-
 дикулярна къ ab и ik , уголъ $fga =$ углу fhi пря-
 мые, поему линія ik касается даннаго круга
 въ точкѣ h (84), также уголъ $fab =$ углу fik
 и уголъ $fba = fki$ (48): но линія $fi = fn = fm =$
 и пр. также и уголъ $ifk = ifn = nfm = mfl$ при
 центръ вписаннаго пятиугольника; поему треуголь-

ники

ф.
176

якия ifk , ifn , nfm и пр. равны между собою; по сей причинѣ бокъ $ik = in = nm =$ и пр. перпендикулярная $fk = fo = fp$ и пр. радиусы круга по рѣшенію; равнымъ образомъ докажется что уголъ $kin = inm = nml =$ и пр. слѣдовательно пятиугольникъ $iklmn$ есть правильной (197), и каждой онаго бокъ касается окружности круга (84).

О ПОДОБНЫХЪ ФИГУРАХЪ И СОДЕРЖАНІИ ПЛОСКОСТЕЙ РАЗНЫХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФИГУРЪ.

Ф. 177 241. **Опредѣл.** Подобныя фигуры efk и mnp называются тѣ, кои будучи раздѣлены одинакимъ образомъ на преугольники, и оныя преугольники какъ на пр. efq egl и пр. одной фигуры efk , подобны сходственнымъ преугольникамъ mno , mos и пр. другой фигуры mnp .

Ф. 179 242. **Опредѣлен.** Одноцентрные круги называются тѣ, кои имѣютъ общій центръ какъ A . Разноцентрные суть тѣ, кои не имѣютъ общаго центра, какъ B .

Ф. 180 243. **Опредѣлен.** Секторъ или вырѣзокъ круга, есть пространство опредѣленное двумя радиусами круга cd и cb и частью окружности $dm b$.

Ф. 182 244. **Опредѣлен.** Подобные секторы называются тѣ, коихъ углы eaf и fem заключающіеся радиусами равны, какъ fae и fem . 245.

245. ЗАДАЧА. Сдѣлать фигуру рав-
ну и подобну данной $abdefgc$.

Рѣшен. Данную фигуру, $abdefgc$ сперва ф. 178
раздѣли произвольнымъ образомъ на пре-
угольники линіями изъ одного угла въ
другой проведенными, какъ значить въ фи-
гурѣ; потомъ проведя линію $ef=ab$, сдѣлай
на оной преугольникъ $efq=abd$, на ли-
нѣ eq преугольникъ $eql=adc$, на ли-
нѣ lq преугольникъ $lqk=cdg$, также
на линѣ kq преугольникъ $kqi=dgf$; и
на концѣ на линѣ qi преугольникъ qih
 $=dfe$, при чемъ произойдетъ фигура
 $efqhikl$ равна и подобна данной $abdefgc$.

Доказ. Понеже преугольники данной
фигуры равны и подобны сходственнымъ
преугольникамъ сдѣланной фигуры по рѣ-
шенію; того ради фигура $abdefgc$ равна
и подобна фигурѣ $efqhikl$ (241).

246. ЗАДАЧА. Наданной линіе mn ,
сдѣлать фигуру подобну данной $efqhikl$.

Рѣшен. Данную фигуру, раздѣли какъ
и прежде на преугольники (245), потомъ ф. 177
у почки m данной линіи mn сдѣлай уголъ
 $mno=feq$, у почки n уголъ $mpo=efq$,
также у конца линіи no сдѣлай уголъ
 $ons=$ углу leq , а у почки o уголъ $mos=$
углу eql ; потомъ на линіе on такимъ же
образомъ сдѣлай преугольникъ onr подо-
бенъ qlk , также и на линіе or сдѣлай
пре-

треугольникъ *ort* подобенъ *qki* и наконецъ на линѣ *ot* здѣлай треугольникъ *otr* подобенъ *qih* (59); при чемъ произойдетъ требуемая фигура.

Доказ. Понеже треугольники данной фигуры *efqhikl* подобны сходственнымъ треугольникамъ здѣланной фигуры *mnoptrs* по рѣшенію; того ради она подобна данной (241).

247. ТЕОРЕМА. Окружности подобныхъ фигуръ *abdefgc* и *efqhikl* содержатся между собою какъ сходственные бока *ab* и *ef* или *ac* : *el*.

Доказ. Понеже треугольники фигуры **ф. 178** *abdefgc*, подобны треугольникамъ другой фигуры *efqhikl*; то для подобства оныхъ треугольниковъ будетъ $db : qf = ab : ef = ad : eq = ac : el = cd : lq = cg : lk = dg : qk = gf : ki = df : qi = ef : hi = ed : qh$ (104); но въ разсужденіи равенства содержаній будетъ $db : qf = ab : ef = ac : el = cg : lk = gf : ki = ef : ih = ed : qh$; также $db + ab + ac + cg + gf + fe + ed : qf + ef + ei + lk + ki + ih + qh = ab : ef$ (ариф. 241), то есть окружность фигуры *abdefgc*, къ окружности фигуры *efqhikl* какъ бока *ab* къ боку *ef*, или *ac* : *el* и проч.

248. ТЕОРЕМА. Окружности правильныхъ многоугольниковъ одного числа боковъ

боковъ, содержатся какъ радіусы, или перпендикуляры отъ центра.

Доказ. Пусть будутъ правильные пя. Ф. 181
 тѣугольники bck и del . Сыскавъ оныхъ центры g и f (199), проводи радіусы bg , gc , fd и fe , изъ центровъ g и f опустѣ перпендикуляры ga и fh ; треугольники bgc и def будутъ подобны, ибо уголъ $bgc = dfe$ при центръ, также уголъ $cbg = edf$, уголъ $bcg = def$ каждой $= \frac{1}{2}$ угла полигона, и для подобства треугольниковъ $bc : de = ag : fh$ (104), а умножа члены перваго содержанія чрезъ число боковъ, то есть чрезъ 5, будетъ $5bc : 5de = bg : df = ag : fh$ (ариф. 232); то есть окружность пятиугольника bck къ окружности другаго del содержится какъ радіусъ bg къ df или перпендикуляръ отъ центра ag къ fh .

Слѣдств. I. Изъ сего слѣдуетъ что Ф. 182
 окружности круговъ fsh и fmh , содер- и 183
 жатся какъ радіусы ah и ex или діаметры fh и fx ; ибо ежели вообразимъ себѣ, что окружности круговъ esh и fmh состоятъ изъ безконечнаго множества такихъ частей, изъ коихъ каждая ничемъ не разнилась отъ прямой линіи, какъ на прим. части hg и hx , тогда круги можно будетъ почитать подобными правильными многоугольниками имѣющими безчисленное число боковъ. И такъ пусть

Часть II К будетъ

будетъ какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ число боковъ N , бокъ первого $lg = z$, бокъ второго $ху = v$ и ежели изъ центровъ оныхъ къ концамъ боковъ проведены будутъ линѣи, то углы при центрахъ, такъ какъ и углы многольниковъ будутъ равны между собою. Того ради для подобія треугольниковъ $h.g$ и $х.у$ будетъ $z : v = ah : ex$, а умножа члены первого содержанія чрезъ N , будетъ $z \times N : v \times N = ah : ex$ (ариф. 232); но $z \times N$ и $v \times N$ означаютъ окружности круговъ, слѣдовательно окружности круговъ содержащіяся между собою какъ ихъ радіусы, или цѣлыя діаметры.

Слѣдств. II. Въ подобныхъ секторахъ fae и fem дуги fse и fm , содержатся между собою какъ радіусы af и ef , или какъ хорды fe и fm ; ибо положимъ что дуга $fse = \frac{1}{x}$ части окружности efh ; того ради и дуга $fm = \frac{1}{x}$ части окружности fht : но по предѣдущему слѣдствію окружность $ehf : fht = af : ef$, посему $\frac{1}{x} ehf$ или fse къ $\frac{1}{x} fht$ или $fm = af : ef = fe : fm$ (104); слѣдовательно дуга fse къ дугѣ fm , какъ хорда fe къ хордѣ fm (ариф. 218).

249. ТЕОРЕМА. Плоскость правильнаго многоугольника $abhc!$ равна треугольнику atg , котораго основаніе ag равно

равно суммѣ боковъ многоугольника, а высота $тр$ равна перпендикуляру опущенному изъ центра $т$ на одинъ изъ его боковъ.

Доказ. Для доказательства сего, пусть будетъ правильной шестіугольникъ $abck$, ф. 184. въ которомъ ежели проведутся изъ центра $т$ ко всѣмъ угламъ радіусы, то оной раздѣлился въ столько равныхъ треугольниковъ сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ (199). И такъ многоугольникъ $abck$ составленъ изъ шести треугольниковъ равныхъ $атб$: но треугольники $атб$ и $атг$ имѣютъ одну и общую высоту $тр$: то оныя содержатся какъ ихъ основанія (139); основаніе жъ $аг$ вшестеро больше основанія $аб$, по сей причинѣ треугольникъ $атг$ будетъ вшестеро больше треугольника $атб$; но шестіугольникъ $abck$ вшестеро больше треугольника $атб$, слѣдовательно треугольникъ $атг$ равенъ шестіугольнику $abhckl$.

Слѣдст. Изъ того явствуется, что плоскость всякаго правильнаго многоугольника, равна параллелограму котораго основаніе af равно полсуммѣ боковъ, а высота $тр$ равна перпендикуляру опъ центра многоугольника: слѣдовательно плоскость всякаго правильнаго многоугольника равна произведенію изъ суммы боковъ на поло-

К 2

вину

вину перпендикуляра отъ центра *тр*, или изъ полусуммы боковъ на перпендикуляръ *тр*.

250. ЗАДАЧА. По извѣстному боку *ae*, пятиугольника *abcde* сыскать онаго площадь.

Рѣшен. Сперва надлежитъ сыскать радиусъ *ag* № 6
Ф. 157 $= eg$ пятиугольника *abcde* (218); потомъ по извѣстнымъ бокамъ треугольника *age* сыщи перпендикуляръ *gn* (154); напоследокъ умножь полсуммы боковъ пятиугольника *ae* перпендикуляромъ *gn*, получишь требуемую площадь пятиугольника *abcde*, то есть $\frac{5ae \times gn}{2}$ (249).

Примѣчан. Такимъ же образомъ легко сыскаться можетъ по извѣстному боку правильного на прим. 6 ти, 10 ти и 12 ти угольника радиусъ, перпендикуляръ отъ центра, высота и площадь, еслили только разсмотримся составленіе каждаго изъ сихъ многоугольниковъ (§. 203, 223, 214. 227), чего ради таковыя задачи здѣсь и не прилагаются.

251. ЗАДАЧА. По извѣстному радиусу *lh*, правильного осмиугольника *ahf*; сыскать бокъ *ah* и площадь онаго.

Рѣшен. и Доказ. Проведи радиусы *lg* и Ф. 162 *li*, почки *g* и *h* соедини прямою линіею *gh*, будетъ уголъ $gli = hli = 45$ град. (201); слѣдовательно уголъ $hlg = 90$ град. и уголъ $lgh = lhg$ (53) $= 45$ град. $= qlg$. И такъ по извѣстнымъ *lg* и *lh* сыщется *gh* (146); раздѣли оную пополамъ частное будетъ

будетъ $= gq = lq$ (55). $li - lq = qi$, въ треугольникѣ hqi по извѣстной hq и qi сыщется hi (146) $=$ боку ah ; потомъ по извѣстнымъ бокамъ треугольника alh сыщется высота lk (154), чрезъ которую умножь полсуммы боковъ правильного осмѣугольника, произведеніе будетъ требуемая площадь (249).

252. ЗАДАЧА. По радіусу se правильного десятиугольника gda сыскать бокъ cd и площадь онаго.

Рѣшен. Радіусъ se раздѣли по наружной посредственной пропорціи, средняя будетъ равна боку cd ф.163
 правильного десятиугольника gda (213); потомъ сыщи среднюю пропорціональную cd (219). По извѣстнымъ бокамъ se , cd и ed треугольника sed , сыщется перпендикуляръ eb , чрезъ которой умножа полсуммы боковъ десятиугольника, получишь требуемую площадь (249).

253. ЗАДАЧА. По данному радіусу gs двенадцатиугольника dcb , сыскать онаго бокъ dc и площадь.

Рѣшен. Проведи радіусы gr и gp , ф.166
 точки s и r соедини прямою линіею rs . Треугольникъ gcr будетъ равноспоронной; ибо уголъ $cgr = pgr = 30$ град. посему $cgr + pgr = 60^\circ$, и уголъ $crs = gcr$ (32) $= 60$ град. по сей причинѣ уголъ $gqc = gqr$, слѣдственно gq перпендикулярна къ cr ; и такъ по извѣстному боку cr равноспороннаго

роннаго треугольника cgr сыщется высота gq (149); и $gp - gq = qr$. $\frac{1}{2}rc = cq = qr$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ cqr , по извѣстной cq и qr найдется бокъ $cr = dc$ (146); наконецъ по извѣстнымъ бокамъ треугольника cgd , сыщется высота ag (154), которую умножь на полсуммы боковъ правильнаго двенадцатиугольника, произведеніе будетъ требуемая площадь (249).

Примѣч. Когда потребно будетъ по извѣстному радіусу сыскать бокъ 24 хъ угольника, то оной по (228) легко опредѣлится можетъ.

254. ЗАДАЧА. По данному радіусу af , сыскать бокъ ik какого нибудь правильнаго многоугольника, описаннаго около круга на прим. пятиугольника ikm .

Рѣшен. Сперва по данному радіусу af , сыщи бокъ ab правильнаго пятиугольника вписаннаго въ кругъ (219); потомъ по извѣстнымъ бокамъ треугольника afb , сыщи перпендикуляръ fg (154), наконецъ для подобія треугольниковъ afb и kfi будетъ $fg : fh = ab : ik$ боку ik .

Примѣчан. Такимъ образомъ сыщется бокъ всякаго правильнаго многоугольника.

255. ТЕОРЕМА. Плоскость круга $xftm$ равна треугольнику $ехс$, котораго основаніе равно окружности, а высота равна радіусу $ех$ того же круга.

Доказ.

Доказ. Ибо естѣли назовемѣ, что кругѣ ф. 183
 естѣ правильной многоугольникѣ имѣющій
 безконечное число боковѣ (248); то окруж-
 ность онаго можно взявъ за сумму сихѣ
 боковѣ а радиусѣ ex за перпендикулярѣ
 упадающей изѣ центра на безконечно ма-
 лой боковѣ by сего многоугольника, слѣд-
 ственно по предѣидущей теоремѣ кругѣ
 будетѣ равенѣ треугольнику exs , копо-
 рого основаніе xs равно окружности кру-
 га а высота равна радиусу ex .

Слѣдст. I. Изѣ того слѣдуетѣ, что
 кругѣ равенѣ прямоугольнику, котораго
 основаніе xd равно половинѣ окружности xs ,
 а высота $=$ радиусу ex (131). Также ра-
 венѣ прямоугольнику hf , коего основаніе
 hx равно четверти окружности а высота
 $=$ діаметру xf . Ибо ежели $xh = hd = ce$
 $=$ четверти окружности круга, и $hc =$
 радиусу ex или ef , то прямоугольникѣ dc
 будетѣ $= cf$ (129), а придавъ къ каж-
 дому общій прямоугольникѣ he , будетѣ
 прямоугольникѣ de , или площадь круга
 xfm равна прямоугольнику hf , коего
 основаніе xh равно четверти окружности
 а высота діаметру xf . Изѣ сего явству-
 етѣ, что площадь круга равна произве-
 денію, изѣ окружности на половину ра-
 діуса ex , или равна произведенію поло-
 вины окружности на радиусѣ, и равна
 также произведенію четверти окружно-
 сти діаметромѣ умноженной.

Слѣдств. II. Плоскость вырѣзка круга *етх*, равна произведенію дуги *тх* половиною радіуса *ех* умноженной. Ибо ежели вообразимъ что вырѣзокъ *етх*, состоимъ изъ безконечнаго множества преугольниковъ какъ *хеу*, *уед* и проч. коихъ всѣ верьхи вѣ центръ круга, а основанія ихъ безконечно малыя части окружности; и что плоскость каждаго изъ сихъ преугольниковъ равна произведенію изъ основанія и половины радіуса *ех*, которой есть общая ихъ высота; то плоскость цѣлаго вырѣзка будетъ равна произведенію суммы всѣхъ основаній или дуги *тх*, чрезъ половину радіуса *ех* умноженной. Изъ сего яспвуетъ, что плоскость вырѣзка *етх* равна преугольнику *ехр* коего основаніе *хр* равно дугѣ *тх*, а высота радіусу *ех*,

Примѣчан. I. Чѣобъ найши площадь круга: (или пакъ называемую квадрапуру круга, то есть такое предложеніе, по средствомъ бы котораго можно сдѣлать квадратъ площадью равной данному кругу) то надлежитъ сперва найшти прямую линію которая бы равна была окружности круга; но какъ мы не имѣемъ еще способа геометрическаго, находить прямую линію совершенно равную окружности круга, или содержаніе діаметра къ своей окружности, и площади круга, то довольствоваться должны такими

кими содержаніями, которыя отъ истиннаго никакой чувствительной погрѣшности имѣть не могутъ, каковы суть слѣдующія: 1е *Архимедово*, ежели діаметръ круга раздѣлился на 7 равныхъ частей, то такихъ въ окружности его будетъ почти 22. 2е *Цейленово* есть 100 : 314. 3е *Мецѣво* 113 : 355, изъ коихъ вернѣйшее есть послѣднее.

Примѣч. II. Понеже изъ первыхъ правилъ геометріи довольно извѣстно, что окружность круга больше нежели окружность каждаго многоугольника вписаннаго въ семъ кругѣ, а меньше окружности каждаго многоугольника описаннаго около того же круга; и чѣмъ больше боковъ фигура имѣть будетъ, тѣмъ меньше разнишя окружность круга отъ окружности вписаннаго или описаннаго многоугольника, и разность наконецъ исчезаетъ тогда, когда число боковъ будетъ безконечно. Сіе упомянувши покажемъ мы что дѣлалъ архимедъ при исканіи содержанія діаметра къ окружности круга. Сперва написалъ онъ въ кругѣ (какъ видно) шестиполютникъ, 24, 48 и 96 полютникъ; равнымъ образомъ описалъ и около круга такой же многоугольникъ; и по средству радиуса круга, сыскалъ впервыхъ боковъ 12 угольника, потомъ 24, 48 и наконецъ исчислилъ длину одного изъ боковъ каждаго 96 полютника (253 и 254),

и окружность слѣдовательно нашелъ умноженіемъ найденнаго числа чрезъ 96. И такъ положивши діаметръ круга разнымъ единицъ, нашелъ окружность вписаннаго многоугольника больше нежели $3\frac{1}{4}$ діаметра, а описаннаго также больше нежели $3\frac{1}{8}$ или $3\frac{1}{4}$; изъ чего заключилъ что окружность круга находящаяся между сими двумя окружностями многоугольниковъ, должна быть непременно также больше нежели $3\frac{1}{8}$, а меньше нежели окружность описаннаго 96 угольника, то есть, когда діаметръ круга будетъ имѣть 7 частей, то должно чтобъ окружность круга была больше нежели 21 а меньше окружности описаннаго 96 ти угольника: но какъ $3\frac{1}{4} = \frac{22}{7}$ нѣсколько меньше окружности описаннаго 96 угольника, слѣдственно число 22 гораздо ближе къ окружности нежели 21, по сей то причинѣ архимедъ и принелъ содержаніе діаметра къ окружности какъ 7 : 22. Сіе содержаніе употреблятъ можно почти безъ погрѣшности въ такихъ только случаяхъ гдѣ не требуется самой точности; а въ тѣхъ дѣйствіяхъ, въ коихъ надлежитъ опредѣлить окружность круга съ большею точностію, должно употреблятъ содержаніе 113 : 355 найденное господиномъ меціемъ; коего справедливость, также и цейленовна содержанія діаметра къ окружности (которыя ближе къ точности нежели архимедово) доказана будетъ въ тригонометріи на своемъ мѣстѣ.

256. ЗАДАЧА. По известному діаметру $ab = 80^\circ$ круга bgd , сыскать онаго окружность и площадь.

Рѣшен. Сдѣлай по Архимедову содержанію ф. 180 слѣдующую пропорцію, $7 : 22 = 80^\circ : \frac{80 \times 22}{7} = 251^\circ, 42857^v =$ окружности круга; или по меѣеву содержанію какъ $113 : 355 = (ab) 80^\circ : \frac{80^\circ \times 355}{113} = 251^\circ, 32743^v =$ окружности круга bgd . По томъ умножь окружность половиною радіуса cb , или чепвертью діаметра ab , то есть $251^\circ, 32743^v \times 20^\circ = 5026^\circ, 54860^v =$ площади круга (255).

257. ЗАДАЧА. Известны Въ кругѣ adb , діаметръ ab съ окружностію bgd вообще, сыскать оныя порознь.

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ 29 къ 7 ми, такъ сумма діаметра съ окружностію, то есть $ba + bgd$ содержиcя къ діаметру ba , которой вычпя изъ общей суммы остатокъ будетъ равенъ окружности bgd . Ибо $7 : 22 = ba : bgd$ (248); посему $(7 + 22)29 : 7 = ba + bgd$ къ діаметру ba (ариф. 228).

258. ЗАДАЧА. По известной дугѣ dm и радіусу cd , сыскать площадь вырѣзка круга $dcbm$.

Рѣшен. Дугу dm , умножь половиною радіуса cd , получишь желаемую площадь вырѣзка круга (255).

259. ЗАДАЧА. По известной дугѣ $dm b$, и градусамъ x угла dcb ; сыскать площадь вырѣзка круга $dcbm$.

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ градусы $x : 360^\circ$ такъ дуга $dm b$ содержится къ окружности $adbg$ (13); потомъ $22 : 7$ такъ окружности $adbg$ къ діаметру ab (255); которой раздѣля пополамъ получишь радіусъ bc . Умножь половиною радіуса bc дугу bd , произведение будетъ пребуемая площадь вырѣзка круга $dcbm$.

260. ТЕОРЕМА. площадь вырѣзка круга $dcbm$ къ площади круга $dgbm$ содержится какъ градусы x угла dcb , къ 360 градусамъ.

Ф.180 Доказ. Понеже дуга $dm b$ къ окружности круга $dgbm$, содержится какъ градусы x угла dcb къ 360° (13), а умножа первые члены сей пропорціи чрезъ $\frac{1}{2}bc$, будетъ $\frac{1}{2}dm b \times bc : \frac{1}{2}dgbm \times bc = x : 360$ град. (ариф. 232): но $\frac{1}{2}dm b \times bc$, есть площадь вырѣзка круга $dcbm$, а $\frac{1}{2}dgbm \times bc$ есть площадь круга $dgbm$ (255), слѣдовательно площадь вырѣзка $dcbm$, къ площади круга $dgbm$ какъ $x : 360^\circ$.

261. ТЕОРЕМА. Площадь круга xft къ квадрату діаметра xf , содержится какъ четверть окружности hx къ діаметру xf , или по содержанію архимедову $11 : 14$, цейленонову $157 : 200$, меціеву $355 : 452$.

Доказ.

Доказ. Понеже прямоугольникъ $hf =$ площади круга xfm (255), и припомъ сѣ квадрапомъ fk имѣющъ одну высоту xf , содержатся какъ ихъ основанія $hx : xk$; но $hx =$ четверти окружности (255), $xk =$ діаметру xf , слѣдовательно прямоугольникъ hf , по естъ площадь круга xfm , къ площади квадрата діаметра xf , содержится какъ четверть окружности xh къ діаметру xf : но содержаніе діаметра къ окружности, архимедово естъ $7 : 22$, Цейленово $100 : 314$, Мецѣво $113 : 355$ (255); то по удвоеніи первыхъ двухъ, а послѣднее умножа чрезъ 4, будетъ Архимедово $14 : 44$, Цейленово $200 : 628$, Мецѣво $452 : 1420$, посему четверть окружности xh будетъ имѣть по содержанію Архимедову 11, Цейленову 157, а по Мецѣву 355 такихъ частей изъ какихъ состоитъ діаметръ $xf = xk$, слѣдовательно площадь круга $xfm : xf^2$ по содержанію Архимедову какъ 11 : 14, Цейленову 157 : 200, Мецѣву 355 : 452.

262. ЗАДАЧА. По известной площади 8000° круга $adbg$ сыскать діаметръ ab .

Рѣшен. Для рѣшенія сего, по Архимедову содержанію будетъ $11 : 14 = 8000^\circ$: ф.180
къ площади квадрата діаметра ab ; корень сего квадрата равенъ будетъ діаметру ab . Или по мецѣву содержанію 355 : 452 такъ площадь

площадь круга содержится къ площади квадрата изъ діаметра ab (261), и

$$Vab^{-2} = ab.$$

263. ЗАДАЧА. По известной площади вырѣзка dcb и углу x° , сыскать дугу dmb и радіусъ dc .

Для рѣшенія сего, сдѣлай слѣдующую пропорцію какъ градусы $x : 360^{\circ} =$ площадь сектора dcb къ площади круга $adbg$; потомъ по известной площади круга $adbg$, сыщи діаметръ ab (262) также и радіусъ cd , наконецъ площадь сектора dcb раздѣля на половину радіуса dc , получишь дугу dmb .

264. ЗАДАЧА. Поданнымъ хордѣ db , и перпендикуляру me , которой падаетъ на половину хорды db ; сыскать площадь отрѣзка круга $debm$.

Рѣшен. Дополни отрѣзокъ dmb въ кругѣ (81), проложи me до g , сдѣлай слѣдующую пропорцію $me : eb = eb : eg$ (172), $me + eg =$ діаметру mg , раздѣля оной пополамъ получишь радіусъ $cb = cd = cm$. симѣрай транспортиромъ уголъ сектора dcb ; положимъ что будетъ оному 70 град. потомъ по известному діаметру gm сыскавъ окружность круга (256), сдѣлай сію пропорцію, какъ $360^{\circ} : 70^{\circ}$ такъ сысканное количество окружности $admbg$ къ дугѣ dmb (13). умножь оную половиною радіуса cb , произведеніе будетъ равно площади сектора (258). изъ cm вычти me , остатокъ будетъ равенъ перпендикуляру se ; и такъ по известной высотѣ se и основанію db сыщи площадь треугольника dbc (154), вычти оную изъ площади сектора $dmbc$, получишь площадь отрѣзка $debm$.

265. ТЕОРЕМА. Площади подобныхъ фигуръ efk и mnr содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ, то есть $efk : mnr = ef^2 : mn^2$.

Доказ. Понеже треугольники фигуры efk , подобны сходственнымъ треугольникамъ фигуры mnr (241); того ради изъ подобныхъ треугольниковъ $efq : mno = fe : mn$ или $eq : mo = eql : mos = ql : os = qlk : osr = qk : or = qki : ort = qi : ot = qih : otp$ (164), и для равенства содержащейся будетъ $ef : mn = efq : mno = eql : mos = qlk : osr = qki : ort = qih : otp$; следовательно $efq + eql + qlk + qki + qih : mno + mos + osr + ort + otp = ef : mn$ (ариф. 241); то есть площадь фигуры fk къ площади фигуры $mnr = ef^2 : mn^2$.

Слѣдств. Площади правильныхъ многоугольниковъ одного числа боковъ, содержащаяся какъ квадраты ихъ боковъ или радиусовъ. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ $bgc : def = bc : de = lg : df$ (164); а по умножении членовъ перваго содержанія чрезъ 5, то есть числомъ треугольниковъ составляющихъ плоскость каждаго пятиугольника bck и del , будетъ (5 bgc) или $bkc : (5def)$ или $del = bc : de = bg : df$ (ариф. 232) ч. д. н. 266.

266. ТЕОРЕМА. Площади круговъ содержатся между собою какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.

Ф. 182 Понеже площадь круга $hfe : hf^{\frac{-2}{2}} = \pi : 14$,
и 183 также и площадь круга $xfm : xf^{\frac{-2}{2}} = \pi : 14$
(261); посему $hfe : hf^{\frac{-2}{2}} = xmf : xf^{\frac{-2}{2}}$ (ариф. 229)
или $hfe : xfm = hf^{\frac{-2}{2}} : xf^{\frac{-2}{2}} = ah : ex$. Тожъ самое докажешся другимъ образомъ; ибо треугольникъ aho равенъ площади круга hfe , также треугольникъ $sех$ равенъ площади круга xfm ; но уголъ $h = x$ прямые, при томъ же $ah : xe = oh : cx$ (248); посему треугольники aho и esx будутъ подобны (105), по сей причинѣ площадь треугольника aho содержится къ площади треугольника $sех$ какъ $ah : ex$ (164); слѣдовательно площадь круга hfe содержится къ площади круга xfm , какъ $ah : ex$ или $hf^{\frac{-2}{2}} : xf^{\frac{-2}{2}}$.

267. ТЕОРЕМА. Когда на бокахъ прямоугольнаго треугольника abc начертятся какія нибудь подобные между собою фигуры, F , D , E , то фигура F , сдѣланная на діогоналѣ, будетъ равна суммѣ прочихъ фигуръ D и F , то есть $F = D + E$.

Доказ.

Доказ. Прелику $ab : ac \stackrel{-2}{=} D : E$ (265),
и $ab + ac : D + E \stackrel{-2}{=} ab : D$ (ариф. 241) $\stackrel{-2}{=} bc : F$ (265); но $ab + ac \stackrel{-2}{=} bc$, по сему и $D + E = F$.

Примѣч. Такимъ же образомъ докажется, что сумма двухъ круговъ или полукруговъ сдѣланныхъ на перпендикулярахъ ab и ac , равна кругу или полукругу сдѣланному на діагоналѣ bc .

268. Опрелѣл. Когда на діагоналѣ ab , равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника abc , опишется полукруга apb и четверть круга $agbc$, то пространство заключающееся между двухъ дугъ apb и agb , называется луночка иллократова (имя изобретателя).

ф.
186.

269. ТЕОРЕМА. Луночка $apbga$, равна прямоугольному равнобедренному треугольнику abc .

Доказ. Изъ верха c прямаго угла acb , опусти на ab перпендикуляръ cd , будетъ треугольникъ $bdc \stackrel{-2}{=} adc$, потому что $bc \stackrel{-2}{=} ac$ по положенію, cd общая, и уголъ $cdb \stackrel{-2}{=} cda$ прямые (30); по сему уголъ $dcb \stackrel{-2}{=} acd$ (32) $\stackrel{-2}{=} 45^\circ \stackrel{-2}{=} \text{углу } cad$ (53), и $dc \stackrel{-2}{=} ad$ (55); но $ad + (dc) ad \stackrel{-2}{=} ac \stackrel{-2}{=} 2ad$ (144), по сей причинѣ площадь круга описаннаго радіусомъ ac будетъ вдвое

ф.
186.

площади круга описаннаго радіусомъ ad ; ибо площади круговъ содержатся какъ квадраты радіусовъ, и потому четверть круга $acbg$ = половинѣ круга abn ; а отнявъ отъ оныхъ общій отрѣзокъ $agbda$, останется луночка $apbg$ равна равнобедренному прямоугольному треугольнику abc .

270. ТЕОРЕМА. Площади луночекъ D и G , равны прямоугольному треугольнику abc .

Ф.187 Доказ. Понеже полукруга $sabc$ = суммѣ полукруговъ $abt + bcp$ (267); а отнявъ отъ равныхъ количествъ общіе отрѣзки $r + e$, останется площадь треугольника abc = суммѣ луночекъ $d + g$, ч. д. н.

Ф.179 **271. Опредѣл.** Крона или венецъ есть пространство, между окружностями двухъ одноцентричныхъ или разноцентричныхъ круговъ заключающееся какъ A и B значить.

272. ТЕОРЕМА. Площадь круга котораго діаметръ хорда ef , равна площади кроны B .

Ф.188 Доказ. Въ первомъ случаѣ. Когда плоскость кроны заключается между двухъ одноцентричныхъ круговъ; то площадь оной равна площади круга, котораго діаметръ хорда ef , касающаяся окружности меньшаго круга: ибо треугольникъ bde прямоугольной, и поному $\overline{de}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{be}^2$ (144); но площади круговъ содержатся какъ квадраты радіусовъ, слѣдственно площадь круга радіуса de безъ пло-

щади круга радіуса db (то есть площадь кроны) равна площади круга, коего радіусъ be или діаметръ ef .

Въ другомъ случаѣ. Когда плоскость кроны заключается между двухъ такихъ окружностей, которыя взаимно касаются въ точкѣ c : то площадь оной равна кругу котораго діаметръ хорда ef проходящая перпендикулярно чрезъ половину части ab діаметра ac . Для доказательства сего, сдѣлай $gd = bc$, и раздѣля оную на двѣ равныя части въ точкѣ m , радіусомъ mg опиши кругъ, котораго окружность будетъ параллельна окружности круга $afce$, и точка m будетъ общій центръ обоихъ круговъ; потому что $bc = gd$ по положенію, и bd общая, посему $dc = bg = ag$; но $md = mg$ радіусы, чего ради и $am = mc$, слѣдовательно точка m есть общій центръ. И такъ по первому случаю площадь круга $afce$ безъ площади круга діаметра gd или bc , равна площади кроны заключающейся между параллельныхъ окружностей, и равна площади кроны заключающейся между двухъ окружностей касающихся между собою.

Въ третьемъ случаѣ. Когда площадь кроны ограничивается окружностями двухъ разноцентрныхъ круговъ; то площадь оной, равна площади круга коего діаметръ есть хорда ef , прорѣзывающая діаметръ ac перпендикулярно въ точкѣ g такъ, что ag равна полсуммѣ линій $ab + dc$. Для доказательства сего, сдѣлай $bh = dc$. Раздѣли ah на двѣ равныя части въ точкѣ g , чрезъ которую проводи хорду ef перпендикулярно къ ac , опредѣли $eg = bd$, раздѣли ge на двѣ равныя части въ точкѣ m , радіусомъ mg опиши кругъ, коего окружность будетъ параллельна окружности круга $afce$; потому что $\frac{ab + (bh) dc}{2} = ag = gb + bh$ по положенію: но $ge = db$, be

общая, посему $ed = bg$ (ариф. 34); слѣдствѣнно $(ed + dc) ec = (bg + bh) gh$ (ариф. 33) $= ag$; а придавъ къ симъ равныя количества gm и em будетъ $(ec + me) mc = (ag + gm) am$, посему точка m есть общій центръ, и такъ по первому случаю будетъ площадь круга $afce$ безъ площади круга діаметра ge или $bd =$ площади кроны заключающейся между параллельныхъ окружностей, и равна кронѣ разноцентрныхъ круговъ.

273. ЗАДАЧА. Известна площадь кроны B в одноцентрныхъ круговъ $aecf$ и bg , и части $ab = cg$; сыскать діаметръ bg меньшаго круга.

Рѣшен. По неже площадь кроны $B =$ площади ф.188 круга косо діаметръ хорды ef (272); того ради по известной площади круга fep , сыщи діаметръ ef (262), раздѣли оной пополамъ, частное будетъ $=$ радіусу be , попомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ $ab : be = be : bc$ (172); и наконецъ $bc = cg =$ діаметру bg .

274. ЗАДАЧА. Площадь кроны B разноцентрныхъ круговъ касающихся между собою въ точкѣ c и часть ab известны, сыскать діаметръ bc меньшаго круга.

Рѣшен. Изъ середины g линіи ab , поставь перпендикуляръ ge , продолжи оной до f , будетъ ф.189 площадь кроны $B =$ кругу efp косо діаметръ хорды ef (272). Сыщи по известной площади круга діаметръ ef (262), раздѣли оной на двѣ равныя части, частное будетъ равно радіусу eg ; на послѣдокъ сдѣлай слѣдующую пропорцію; $ag : ge = ge : gc$ (172), $gc = gb = bc$.

275. ЗАДАЧА. Известны, площадь кроны B в разноцентрныхъ круговъ, и части ab

ab и cd ; сыскать діаметръ bd меньшаго круга.

Рѣшен. Сдѣлай $bh = dc$, потомъ линію ah рав. ф. 190
 ную $ab + dc$ раздѣли на двѣ равныя части въ поч-
 кѣ g , изъ которой на діаметрѣ ac поставь перпен-
 дикуляръ gg , продолжи оной до f ; площадь данной
 кроны B будетъ равна площади круга epf діаметра
 ef (272). По известной площади круга сыщи діа-
 метръ ef (262), раздѣли оной на двѣ равныя час-
 ти, частное будетъ равно радіусу ge ; наконецъ
 сдѣлай сію пропорцію: $\frac{1}{2}(ab + dc) = ag : ge = ge : gc$
 (172); $gc - gh (gb + dc) = bd$.

276. Опредѣл. Эллисисъ есть пространство на
 плоскости опредѣленное такого свойства кривою ф. 191
 линіею, что всякая оной почка какъ на примѣрѣ k ,
 n , q , и проч. опредѣлена перпендикулярно стоящею
 на оси ab четвертою пропорціональною линіею, ik ,
 mn , и проч. сысканною къ большой ab и меньшей оси
 gh (кои такъ называются) и каждому полупопере-
 шнику iy , mv , pr и проч. круга большой оси ab .

277. ЗАДАЧА. По даннымъ двумъ осямъ
 ab и cd начертить эллисисъ.

Данную ab раздѣли на двѣ равныя части въ почкѣ
 x , чрезъ которую проводи gh перпендикулярно къ ab ф. 191
 такъ, чтобѣ xh и xg равны были $\frac{1}{2} cd$, потомъ раді-
 усомъ ax опиши кругъ $acbd$, раздѣли ax въ нѣсколь-
 ко равныхъ частей въ почкахъ i , m , p , s и проч. поставь
 перпендикуляры iy , mv , pr , st и проч. потомъ сыски-
 вай къ осямъ ab , gh и къ каждому полупоперешнику
 круга iy , mv , pr , и проч. четвертыя пропорціональ-
 ныя линіи ik , mn , pq , so и проч. чрезъ почки сихъ
 линій проводи искусно рукою кривую линію $iknpqoa$;
 пожь самое здѣлай и въ прочихъ четвертяхъ круга;

пространство опредѣленное сею кривою линією *ahbga* будетъ эллипсисъ (276).

Примѣч. Хотя въ предѣдущей задачѣ и показано, какимъ образомъ по даннымъ двумъ осямъ чертить эллипсисъ, но въ практикѣ съ точною вѣрностію сего учинить не можно; ибо ежелибъ радіусъ *ax* раздѣленъ былъ и въ безчисленное число частей, отъ чегобъ произойти могло безчисленное число полупоперешниковъ круга; слѣдовательно таковоежъ количество принуждено бѣ было къ большей и меньшей осямъ и къ каждому полупоперешнику круга, ссыкивать четверныхъ пропорціональныхъ линій; припомъ же и нѣго утвердить не можно, чтобъ при исканіи оныхъ линій не могло произойти какой либо хотя малѣйшей ошибки: да естлибъ оное и съ самою вѣрностію учинено было; то чрезъ точки опредѣляемыхъ полупоперешниковъ эллипсиса, едважъ можно будетъ провести рукою исправно кривую линію; и такъ для избѣжанія сей трудности предлагается здѣсь практической способъ, посредствомъ котораго легчайшимъ образомъ, и съ точною вѣрностію, начертивъ можно желаемой эллипсисъ слѣдующимъ образомъ:

Данную большую ось *ab* раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ *x*, чрезъ которую проводи *gh* перпендикулярно къ *ab* такъ, чтобъ *xh* и *xg* равны были половинѣ меньшей оси *cd*. Отъ точки *a* опредѣли *ad* $= xg$ или $= \frac{1}{2} gh$, остатокъ *dx* раздѣли на 8 равныхъ частей, сдѣлай линію *dm* $= \frac{8}{8} dx$. Радіусомъ *am* опиши кругъ; положи *bc* $= am$, изъ точки *c* радіусомъ *bc* опиши кругъ, на линіе *mc* начерти равностороннѣе треугольники *mes* и *mfc*, продолжи *es* и *et*, также *fs* и *ft*. пока пересѣкутся съ окружностями круговъ въ точкахъ *n*, *k*, *r* и *q*; напередокъ изъ точки *c* радіусомъ *ek* опиши дугу *khn*, а изъ точки *f* радіусомъ *fq* дугу *qgr*; ко-
шорыя

торый пройдя чрезъ концы меньшей оси gh и коснувшись круговъ въ точкахъ k, n, q и r (89), определяющъ эллипсисъ $aqgrbnhk$.

Справедливость сего доказана будетъ въ криволинейной геометріи.

278. ТЕОРЕМА. Площадь круга $acbd$ изъ большой оси ab , къ площади эллипсиса $ahbg$ содержится какъ большая ось ab къ меньшей gh .

Доказ. Понеже $ab : gh = (\frac{1}{2}ab)cx : (\frac{1}{2}gh)xh = iy : ik = mv : mn = pr : pq = st : so$ (277), по сему $cx + i, + mv + pr + st : xh + ik + mn + pq + so = ab : gh$ (ариф. 241): но предъидущей членъ первого содержанія ничто иное какъ сумма полупоперешниковъ составляющихъ четверть круга $acbd$, а послѣдующей сумма полупоперешниковъ составляющихъ четверть эллипсиса $ahbg$, слѣдовательно $(cx + iy + mv + pr + st) \times 4 : (xh + ik + mn + pq + so) \times 4 = ab : gh$ (ариф. 232), то есть площадь круга $acbd$ къ площади эллипсиса $agbh$ содержится какъ $ab : gh$. Ф. 191

279. ТЕОРЕМА. Площадь эллипсиса $adbc$, равна площади круга котораго діаметръ bf средняя пропорціональная между меньшей $cd = bg$ и большою осью ab .

Доказ. Положимъ что площадь эллипсиса $= p$, площадь круга изъ большой оси $ab = q$, площадь круга изъ средней $bf = m$; то будетъ $q : p = ab : (cd)bg$ (278), и при томъ $\overline{ab}^{-2} : \overline{bf}^{-2} = ab : bg$ (181); по сему $q : p = \overline{ab}^{-2} : \overline{bf}^{-2} = q : m$ (26); чего ради $q : p = q : m$ (ариф. 229): но $q = q$, слѣдовательно $p = m$, то есть площадь эллипсиса $acbd$ равна площади круга коего діаметръ bf . Ф. 193

280. ЗАДАЧА. Большая ab и меньшая ось cd известны; сыскать площадь эллипсиса $adbc$.

Рѣшен. На продолженной ab сдѣлай $bg = cd$, потомъ раздѣля ag на двѣ равныя части опиши полукруга afg . Изъ точки b поспавъ перпендикуляръ bf , раздѣля оной пополамъ, опиши кругъ. По известной ab и $cd = bg$ сыщи bf (174), напоследокъ по діаметру bf сыщи площадь круга bif (256), которая будетъ равна площади эллипсиса $adbc$ (279). Или сыскавъ площадь круга большей оси ab (256), сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ большая ось ab содержицца къ меньшей cd , такъ площадь круга большей оси ab , будетъ содержаться къ площади эллипсиса $adbc$.

281. ЗАДАЧА. Площадь эллипсиса $acbd$ и меньшая ось cd известны, сыскать большую ось ab .

Рѣшен. Поелику площадь эллипсиса $acbd$, равна площади круга діаметра bf (279): то по известной площади онаго сыскавши діаметръ bf (262), сдѣлай слѣдующую пропорцію; какъ меньшая ось cd или bg содержицца къ діаметру bf , такъ оной же діаметръ bf къ большой оси ab .

282. ЗАДАЧА. По известной площади эллипсиса $acbd$ и содержанію большой оси ab къ меньшей cd , какъ 9 : 5, сыскать оныя пороэнь.

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ 3 : 9, такъ площадь эллипсиса $acbd$ будетъ содержаться къ площади круга изъ большой оси ab (278); потомъ зная площадь круга $anbh$, сыщи онаго діаметръ ab (262): напоследокъ сдѣлай сію пропорцію, 9 : 3 = ab : къ меньшей оси cd .

О ПРЕ-

О ПРЕВРАЩЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ ИЗЪ ОДНОЙ ФИГУРЫ ВЪ ДРУГУЮ.

283. Опрѣдѣл. Превратишь плоскую фигуру въ другую разумѣеши начерпишь фигуру, копорая бы плоскостію была равна данной, а наружностію и другими свойствами была желаемая.

284. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , превратить въ равнобедренный agb .

Рѣшен. Раздѣля основаніе ab въ по-
чкѣ d пополамъ (39), поставь перпенди-
куляръ dg (40), изъ точки c пропями
 cg параллельно ab (52), точки a , g и b
соедини прямыми линіями ag и bg , бу-
детъ треугольникъ agb желаемый.

№ 3
Ф.
194.

Доказат. Смотри въ (5129).

285. ЗАДАЧА. Данной параллелограмъ ac , превратить въ треугольникъ ade .

Рѣшен. По продолженіи ab , здѣлай be
 $= cd$, проведи de , получишь треугольникъ
 ade желаемой.

Ф. 195

Доказ. Смотри въ (5131).

286. ЗАДАЧА. Данной треугольникъ abc превратить въ прямоугольникъ ae по основанію ac .

Рѣшен. Изъ верха b на основаніе ac
опусти перпендикуляръ bd (41), также
Л Б изъ

Ф. 196

изъ a и c поспавъ перпендикуляры ag и ce (58), наконецъ раздѣля высоту bd въ f пополамъ, пропяти eg въ параллель основанію ac , будетъ прямоугольникъ $agce$ желаемой.

Доказ. Справедливость сего видна въ (5130).

287. ЗАДАЧА. Всякой данной треугольникъ abc превратить въ параллелограмъ ae по углу cab .

Рѣшен. Бокъ ac , раздѣли въ d пополамъ (39), изъ точекъ d и b пропяти линіи de и be параллельно ab и ac (52), будетъ параллелограмъ ae желаемой.

Доказ. Понеже $ad = dc$ по рѣшенію, и равна be (50), посему $be = dc$, уголъ $feb = fdc$ и уголъ $fbe = fcd$ (48), чего ради треугольникъ $bef = dfe$ (31), а придавъ къ симъ общей четверосторонникъ $adfb$, будетъ треугольникъ $abc =$ параллелограму $adeb$.

288. ЗАДАЧА. Всякой четверосторонникъ $abcd$, превратить въ треугольникъ abe .

Рѣшен. Пропяти bd , изъ точки c проведи ce параллельно bd пока пересѣчется съ продолженною ad въ точкѣ e , наконецъ точки b и e соединя прямою линіею be , будетъ треугольникъ abe желаемой.

Доказ.

Доказ. Понеже треугольникъ $bcd = bed$, поелику имѣютъ одно основаніе bd и между параллельныхъ линій bd и ce (129); а придавъ къ онымъ треугольникъ abd , будетъ треугольникъ $abe =$ четвероспороннику $abcd$ (ариф. 33).

289. ЗАДАЧА. Данной треугольникъ abc превратить въ другой afe по данной высотѣ cd .

Рѣшен. Изъ точки d проведи df параллельно основанію ac , которая пересѣчется ф. съ продолженною ab въ точкѣ f , пропями 199. fc ; потомъ проведи be параллельно fc , наконецъ точки e и f соедини прямою линіею ef , получишь, треугольникъ afe желаемой.

Доказ. Треугольникъ $bef = bec$ имѣютъ одно основаніе be и между параллельныхъ линій be и cf (129); а придавъ къ симъ треугольникъ abe , будетъ $(abe + bef) aef = (abe + bec) abc$, ч. д. и.

Примѣч. Когда высота cd будетъ меньше высотъ даннаго треугольника abc : то изъ точки d проведи df параллельно основанію ac , изъ b линію be параллельно af . Точки e и f соедини прямою линіею ef , получишь треугольникъ cfe желаемой. Ибо треугольникъ $afe = afb$ (129), посему $(afe + afb) cfe = (abf + afb) abc$ (ариф. 33).

ф.
200.

290. ЗАДАЧА. Данной треугольникъ abc превратить въ другой по данной высотѣ cd и углу x .

Рѣшен.

Рѣшен. Сперва данной треугольникъ $\Phi.201$ abc преврати въ другой esc (289), потомъ сдѣлай уголъ esc = данному x , изъ точки f гдѣ бокъ cf съ продолженною dg пересѣчется, протяни линію ef , будетъ треугольникъ cfe желаемой.

Доказ. Понеже треугольникъ abc = треугольнику esc по предѣдущей задачѣ, но треугольникъ esc = треугольнику esc (129), слѣдовательно треугольникъ abc = Δesc .

291. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , преврати въ другой по данному основанію ad .

Рѣшен. Протяни изъ c линію cg въ $\Phi.$ параллель db , а изъ d въ g , будетъ $\Phi.202.$ треугольникъ agd желаемой.

Доказ. Треугольникъ bdg = bdc (129). Къ симъ треугольникамъ придай общій треугольникъ abd , будетъ треугольникъ agd = abc (ариф. 33).

Примѣч. Когда данное основаніе ad $\Phi.$ будетъ больше основанія ac треугольника abc , $\Phi.203.$ то превращается оной такимъ же образомъ какъ сказано, и треугольникъ abc будетъ = agd . Ибо треугольникъ cgb = cgd (129); а придавъ къ симъ треугольникамъ общій треугольникъ acg , будетъ треугольникъ abc = agd .

292. ЗАДАЧА. Прямоугольникъ ac , превратить въ другой по данной высотѣ be .

Рѣшен. Протяни линію ech пока пересѣчется съ продолженною ad въ h , на продолженной cb сдѣлай $bf = dh$, изъ точекъ f и e проводи fg параллельно be , и eg параллельно bf ; будетъ прямоугольникъ bg желаемой. Ф. 204.

Доказ. Треугольникъ bec подобенъ треугольнику dch ; ибо уголъ $ebc = cdh$ прямые, уголъ $bce = dhc$ и уголъ $bec = dch$ (53), посему $be : cd = bc : (dh)$ bf (104), причемъ $be \times bf = bc \times cd$, то есть прямоугольникъ $ac = bg$ (133).

293. ЗАДАЧА. Параллелограмъ $abcd$ превратить въ другой по данному основанію dh .

Рѣшен. Протяни линію hce пока пересѣчется съ продолженною ab въ e , изъ e на bc опусти перпендикуляръ ei , изъ h на линію dh поставь перпендикуляръ $hp = ei$, проводи hf параллельно продолженной cd , и pg въ параллель hd , получишь параллелограмъ gh равенъ данному bd . Ф. 205.

Доказ. Треугольникъ cdh подобенъ cbe ибо уголъ $dhc = bce$, уголъ $dch = bec$ (48), посему уголъ $cdh = ebc$ (53); и для подобія оныхъ $(dh)gf : (bc)ad = ck : (ei)hp$ (104); при чемъ gf

$gf \times hp = ad \times ck$; то есть параллелограмм $dhfg$ = параллелограму $abcd$ (133).

Примѣч. Такимъ же образомъ и прямоугольникъ превращается въ другой поданному основанію.

294. ЗАДАЧА. Параллелограммъ ab , превратить въ квадратъ bh .

Ф. 206. *Рѣшен.* На продолженной cb сдѣлай bf = высотѣ be параллелограма ab , опиши на cf полкруга cgf , поставь изъ b перпендикуляръ bg ; сдѣлай квадратъ $bghi$ (69), которой будетъ = параллелограму ab .

Доказ. Понеже прямоугольникъ ec = квадрату bh (172); но прямоугольникъ ce = параллелограму ab (129), слѣдовательно и квадратъ bh равенъ параллелограму ab .

295. ЗАДАЧА. Квадратъ ad , превратить въ прямоугольникъ fh , котораго бы основаніе съ высотой вообще равны были данной линіе bc .

Ф. 207. *Рѣшен.* Данную bc раздѣля пополамъ опиши полкруга bgs , продолжи ed до g , проведи gf параллельно db , на fc сдѣлай прямоугольникъ fh , коегобъ высота fk была равна bf (70), будетъ прямоугольникъ fh желаемой.

Доказ. Прямоугольникъ fh $\overset{-2}{=} gf$ (172) $\overset{-2}{=} bd$; но $bf = fk$, слѣдовательно $fk \overset{-2}{=} fc$ = данной bc .

296. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , превратить въ другой ade , что бы верхъ онаго лежалъ въ данной точкѣ e , (которая внѣ треугольника) а основаніе въ линіи ac .

Рѣшен. Протяни изъ e въ a линію ae , изъ b линіею bf параллельну ac , изъ f линію fd параллельну ec ; наконецъ проводи линію ed , треугольникъ ade будетъ = данному abc . ф. 208.

Доказ. Треугольникъ dfe = треугольнику dfc (129), къ симъ треугольникамъ придай треугольникъ afd , будетъ треугольникъ $(dfe + afd)ade$ = треугольнику $(afd + dfc)afc$: но треугольникъ afc = треугольнику abc (129), слѣдовательно $abc = ade$.

297. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc превратить въ другой, чтобъ верхъ онаго лежалъ въ точкѣ d , (которая внутри треугольника) а основаніе въ прямой линіи $сѣ$ ac .

Рѣшен. Протяни въ d линіи ad и dc , продолжи ac въ обѣ стороны, проводи изъ b линію be параллельну ad , bf въ параллель dc , наконецъ проводи de и df , будетъ треугольникъ edf желаемой. ф. 209.

Доказ. Треугольникъ adb = треугольнику ade , и треугольникъ cdb = треуголь-

угольнику cdf (129), къ симъ преу-
гольникамъ придай adc , будетъ $(adb$
 $+ cdb + adc) abc =$ преугольнику $(ade$
 $+ cdf + adc) edf$ (ариф. 33).

298. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc пре-
ратить въ другой по данному боку cd
и углу acd .

Рѣшен. Протяни bg въ параллель ac ,
Ф.210 точки a и g соедини прямою линіею ag ,
потомъ треугольникъ agc преврати въ
другой по основанію cd (291), будетъ
треугольникъ cde жслаемой.

Доказ. Понеже данной треугольникъ
 $abc = agc$ (129), а сей равенъ треуголь-
нику edc , слѣдовательно треугольникъ
 $edc =$ треугольнику abc .

299. ЗАДАЧА. Сыскать содержаніе
двухъ подобныхъ фигуръ A и B .

Рѣшен. Къ сходственнымъ бокамъ ab ,
Ф.211 и ac сыщи шретью пропорціональную линію
 ce (107). Будетъ $A : B = ab : ac$ къ шретьи
пропорціональной ce ; то есть фигура A
содержится въ подобной фигурѣ B столько
разъ, сколько бокъ ab въ шретьи
пропорціональной ce .

Доказ. Понеже $ab : ac = (bd) ac : ac$
по рѣшенію, при чемъ $ab : ac = ab : ce$
(181),

(181), но $A : B = \overset{-2}{ab} : \overset{-2}{ac}$ (265), посему
и $A : B = ab : ac$.

Слѣдст. Изъ того видно, что площадь всякой фигуры содержиcя къ площади другой подобной фигуры, какъ бокъ ab первой, къ третій пропорціональной линіе ce , сысканной къ боку первой и сходственному боку ac второй фигуры

300. ЗАДАЧА. Начертить треугольникъ равенъ данному acb , и что бы одинъ его бокъ былъ параллеленъ данной линіе de .

Рѣшен. Протяни cf въ параллель данной de , опиши на ab полкруга, съищи ф. среднюю пропорціональную линію ah между af и ab (172); и протяни изъ h линію hi въ параллель de , будетъ треугольникъ aih желаемой.

Доказ. Треугольникъ $acf : acb = af : ab$ одной высоты cp (139), а изъ подобныхъ по рѣшенію треугольниковъ $acf : aih = af : ab$ (299); посему $acf : acb = acf : aih$; но $acf = acf$, слѣдовательно и $acb = aih$.

301. ЗАДАЧА. Начертить треугольникъ равенъ данному abc , а треугольнику P подобенъ.

Ф.
213.

Рѣшен. На основаніи ac сдѣлай пре-
угольникъ acf , котораго бы углы при осно-
ваніи равны были угламъ x и y преуголь-
ника P (59); пропями bg въ параллель
 ac , сыщи среднюю пропорціональную ce меж-
ду cf и cg (172), сдѣлай $ch = ce$; пропями
 hd въ параллель af , преугольникъ cdh бу-
детъ желаемой.

Доказ. Треугольникъ cdh подобенъ cfa и по-
добенъ данному P порѣшенію. Треугольникъ
 $acf : acg = cf : cg$ одной высоты ai (139), а изъ
подобныхъ треугольниковъ $acf : cdh = cf : cg$
(299), посему $acf : acg = acf : cdh$; но $acf =$
 acf , по сей причинѣ и $acg = cdh$; преуголь-
никъ же $acg =$ данному acb (129), слѣдова-
тельно преугольникъ $cdh = abc$ и подобенъ
данному P .

302. ЗАДАЧА. Данную линію ab ,
раздѣлить на двѣ части такъ, чтобъ
одна часть была средняя пропорціо-
нальная между другою частію и дан-
ною линіею cd .

Ф.
214.

Рѣшен. Данную ab продолжи до c
такъ, что бы bc равна была другой данной
 cd , опиши на ac половину круга acd , изъ
 b поставь перпендикуляръ bd , раздѣли bc
въ f на двѣ равныя части. Изъ f радіу-
сомъ fd опиши дугу de , будетъ eb сред-
няя пропорціональная между частію ae и
данною линіею bc или cd .

Доказ.

Доказ. Изъ f радіусомъ fb опиши пол-
 круга bnc пропяти eh , при чемъ будетъ
 треугольникъ $bdf = hef$. Ибо уголъ efd
 общий, линія $hf = bf$, и $fe = df$ радіу-
 сы, посему $bd = he$ и уголъ $dlf = ebf$
 прямые (30). Будетъ $bd = (ae + eb)$
 $\times bc = ae \times bc + eb \times bc$ (172), также eh
 $= (eb + bc) \times eb = eb \times eb + bc \times eb$ (185),
 но $bd = he$ по рѣшенію; посему $ae \times bc$
 $+ eb \times bc = eb \times eb + bc \times eb$; а отнявъ
 отъ сихъ величину $bc \times eb$, останется
 $ae \times bc = eb \times eb = eb^2$ (ариф. 34); слѣдо-
 вательно eb средняя пропорціональная
 между ae и bc .

303. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , не
 перемѣняя угла bci , превратитъ въ
 другой mti , чтобъ одинъ его бокъ mi
 былъ въ прямой линіе съ данною точ-
 кою d .

Рѣшен. Продолжи основаніе bc въ обѣ
 стороны, изъ d на bc опусти перпен-
 дикуляръ de , сдѣлай $ef = de$, пропяти fg
 въ параллель bc . Данной треугольникъ abc
 преврати въ другой cgk по высотѣ ef (289),
 пропяти dh въ параллель ac , сдѣлай $cl =$
 основанію ck превращеннаго треугольника
 cgk . Линію hc раздѣли на двѣ части такъ,
 чтобъ одна часть ct была средняя про-
 порціональная, между другою частію ht ,
 и линіею cl или ck (302). Изъ d чрезъ
 М 2 точку

почку m , пропяти линію dmi пока пересѣчется съ продолженнымъ бокомъ ca въ почкѣ i ; будетъ преугольникъ mci равенъ данному abc .

Доказ. Высота de преугольника mdh , равна высотѣ ef преугольника kgc , такъ же $hm : mc = mc : (kc)cl$ по рѣшенію, и преугольникъ mci подобенъ преугольнику mdh ; ибо уголъ $mci = mdh$, уголъ $icm = mhd$ (48), и уголъ $imc = hmd$ (20); того ради преугольникъ $hdm : mic = hm : (kc)cl$ (299), преугольникъ же $hdm : (kgc)abc = hm : (kc)cl$ (139), посему $hdm : abc = hdm : mic$ (ариф. 229); но $hdm = hdm$, слѣдовательно $abc = mic$.

304. ЗАДАЧА. Всякой четверосторонникъ $abcd$ превратить въ прямоугольникъ gd .

№ 9.
ф. 216

Рѣшен. Пропяти bf въ параллель ac , почки c и f соедини прямою линіею cf , преугольникъ dcf преврати въ прямоугольникъ gd (286), которой будетъ $=$ четверостороннику $abcd$.

Доказ. Треугольникъ $afc = abc$, имѣющіе одно основаніе ac и между параллельныхъ линій ac и bf , къ симъ преугольникамъ придай преугольникъ acd будетъ преугольникъ $(acf + acd) dcf = abc + acd =$ четверостороннику $abcd$; но преугольникъ $dcf =$ прямоугольнику gd (286); слѣдовательно прямоугольникъ $gd =$ четверостороннику $abcd$. **305.**

305. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ $abcd$ превратить въ треугольникъ efg , коего бы верхъ находился въ данной точкѣ e .

Рѣшен. Пропяни изъ b линію bf параллельну ae , изъ c линію cg параллельну ed ; наконецъ пропяни ef и eg , треугольникъ feg будетъ желаемой. ф. 217

Доказ. Треугольникъ $aef = aeb$, а треугольникъ $edg = edc$, къ симъ равнымъ треугольникамъ придай треугольникъ aed , будетъ $(aef + edg + aed) feg = aeb + edc + aed =$ четверостороннику $abcd$.

306. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ $abcd$ превратить въ трапецію $aefd$.

Рѣшен. Продолжи бока ab и cd , пока пересѣкутся въ точкѣ k , треугольникъ kbc преврати въ другой kef , котораго бы бокъ ef былъ параллеленъ ad (300), будетъ трапеція $aefd =$ четверостороннику $abcd$. ф. 218

Доказ. Треугольникъ $kbc = ekf$ по рѣшенію (300); отъ коихъ отними общую фигуру $kepc$, останется треугольникъ $ebp = pcf$, а придавъ къ симъ треугольникамъ фигуру $akpfd$, будетъ $(ebp + akpfd) aefd = (pcf + akpfd) abcd$, ч. д. н.

307. ЗАДАЧА. Пятиугольникъ $abcde$, превратить въ треугольникъ fsg .

М 3 Рѣшен.

Рѣшен. Протяни изъ b линію bf параллельну ac , изъ d линію dg параллельну ce ; попомѣ протяги cf и cg , будетъ треугольникъ fsg равенъ пятиугольнику $abcde$.

Доказ. Треугольникъ $acf = acb$, и треугольникъ $ecg = ced$ (129), а придавъ къ онымъ треугольникъ ace , будетъ $(acf + ecg + ace) fsg = abc + ced + aec =$ пятиугольнику $abcde$.

308. ЗАДАЧА. Пятиугольникъ $abcde$ превратить въ треугольникъ по сторонамъ ab и углу eab .

Ф. Рѣшен. Изъ d протяни dg параллельно ce , изъ c линію cf параллельну bg , проведи bf , треугольникъ abf будетъ желаемой.

Доказ. Треугольникъ $gce = edc$ (129), къ симъ треугольникамъ придай четверосторонникъ $abce$, будетъ четверосторонникъ $abcg =$ пятиугольнику $abcde$; также треугольникъ $gbc =$ треугольнику gbf (129), а придавъ къ онымъ треугольникъ abg , будетъ четверосторонникъ $abcg =$ треугольнику abf : но $abcg =$ пятиугольнику $abcde$, слѣдовательно и треугольникъ $abf =$ пятиугольнику $abcde$.

309. ЗАДАЧА. Данной пятиугольникъ $abcde$, превратить въ другой $ahide$, чтобъ одинъ его бокъ hi былъ параллеленъ линіи dg .

Рѣшен.

Рѣшен. Продолжи бока ab и dc пока пересѣкутся въ k . Треугольникъ bck преврати въ другой hik , котораго бы бокъ hi былъ параллеленъ линіе dg (300); будетъ пятиугольникъ $ahide$ равенъ данному пятиугольнику $abcde$. Ф. 221

Доказ. Треугольникъ $bck = hik$ по рѣшенію (300), отъ коихъ опнявъ общій четверосторонникъ $khrc$, будетъ треугольникъ $irc = brh$, придай къ симъ фигуру $abride$; будетъ пятиугольникъ $abcde =$ пятиугольнику $ahide$.

310. ЗАДАЧА. Шестиугольникъ $abcdef$, превратитъ въ треугольникъ bcs по сторонамъ bc и углу abc .

Рѣшен. Продолжи fe , af и ba , пропни dk въ параллель ec , kh въ параллель fc , hg въ параллель ca ; наконецъ проводи cg , будетъ треугольникъ $gcb =$ данной фигурѣ $abcdef$. Ф. 222.

Доказ. Треугольникъ $cek = cde$ (129); придай къ каждому фигуру $bcefa$, будетъ фигура $cbafk = abcdef$. Треугольникъ $ckf = cfh$ (129), а придавъ къ каждому фигуру $abcf$, будетъ фигура $abckf =$ четверостороннику $abch$; также треугольникъ $acg = ach$ (129), придай къ каждому изъ сихъ треугольниковъ abc , будетъ треугольникъ $bgs = abch$; но $abch = abckf = abcdef$; слѣдовательно треугольникъ $bgs =$ шестиугольнику $abcdef$.

311. ЗАДАЧА. Превратить лятіугольникъ adc , въ треугольникъ, котораго бы верьхъ лежалъ въ точкѣ o , а основаніе проходя чрезъ точку a было параллельно боку cd .

Ф. 223. **Рѣшен.** Чрезъ точку a пропями линію gi въ параллель cd , bf въ параллель ac , eh въ параллель ad , и линіи dh и cf . Преврати трапецію $fc dh$ въ треугольникъ goi (305) получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ $afc = acb$, и треугольникъ $adh = aed$ (129), кѣ симъ треугольникамъ придай треугольникъ cad будетъ $(afc + acd + adh) fcdh = (acb + acd + aed) abcde$; но четверосторонникъ $fc dh =$ треугольнику goi по рѣшенію (305), слѣдовательно треугольникъ $goi =$ пятиугольнику $abcde$.

312. ЗАДАЧА. Многоугольникъ $abcdef$, превратить по углу abc и боку bc въ треугольникъ.

Ф. 224. **Рѣшен.** Пропями fg параллельно ae , проводи eg , пятиугольникъ $bcedg$ преврати въ треугольникъ bch (308), получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ $afg = fge$ (129), а придавъ кѣ онымъ фигуру $fgbcde$, будетъ многоугольникъ $abcdef =$ пятиугольнику $gbcede$ (ариф. 33), который = пре-

треугольнику bch по рѣшенію (308),
слѣдовательно данной многоугольникъ
 $abcdef =$ треугольнику bch .

313. ЗАДАЧА. Данной многоугольникъ
 $abcde$; превратить въ треугольникъ fgh ,
когого бы верьхъ лежалъ въ точкѣ g
(которая внутри фигуры) а основаніе
въ прямой линіе съ основаніемъ ae .

Рѣшен. и Доказ. Многоугольникъ $abcde$ ф.
преврати въ треугольникъ ick (307), а 225.
сей треугольникъ ick , преврати въ дру-
гой fgh когого бы верьхъ лежалъ въ точкѣ
 g (297), получишь желаемое.

Примѣч. Когда точка g будетъ внѣ фигуры,
то сперва данную фигуру преврати въ треуголь-
никъ (307), а потомъ сей треугольникъ преврати
въ другой, чтобы верьхъ онаго дежалъ въ данной
точкѣ g (296).

314. ЗАДАЧА. Неравносторонней тре-
угольникъ abc превратить въ равно-
сторонней afg .

Рѣшен. На линіе ab сдѣлай равно-
сторонней треугольникъ abe , продолжи ф.
 ae до d , просяни cd въ параллель ab , на 226.
 ed опиши полкруга. Изъ a поставь перпен-
дикуляръ af , сдѣлай равносторонней тре-
угольникъ afg ; которой будетъ равенъ
данному abc .

Доказ. Треугольникъ $aeb : abd = ae : ad$
имѣющіе одну высоту bh (139); пре-
М 5 уголь-

угольникъ же $aeb : afg = ae : ad$ (299), по-
сему $aeb : abd = aeb : afg$; но $aeb = aeb$,
слѣдовательно $afg = abd = abc$ (129).

Примѣч. Такимъ образомъ всякую фигуру пре-
враща прежде въ какой нибудь треугольникъ,
можно превратить въ равносторонной треугольникъ.

315. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc пре-
ратить въ какой нибудь правильной
многоугольникъ; на прим. въ пяти-
угольникъ $blkih$.

Рѣшен. Начерти произвольной величины
Ф. правильной многоугольникъ, подобной пре-
227. буемому какъ здѣсь $поq$ (214), а на линіе
 ab треугольникъ abd подобенъ $пор$ (59),
что бы онаго уголъ d былъ $= про$; про-
должи db до e , просяни $се$ въ параллель
 ab и линію ae ; раздѣли eb во столько рав-
ныхъ частей сколько пребуемой много-
угольникъ боковъ имѣетъ, какъ 1, 2, 3, 4
и 5 частей; между bd и частию bi същи
среднюю пропорціональную линію bg (173);
изъ точки g радіусомъ bg опиши кругъ
 $bhikl$, въ которомъ начерти правильной
многоугольникъ $hiklb$ пребуемаго числа
боковъ, получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ $abd : abi = db : bi$
имѣющіе одну высоту as (139), также
треугольникъ $abd : bgh = db : bi$ (299);
чего ради $abd : abi = abd : bgh$; но $abd =$
 abd , слѣдовательно $abi = bgh$; треуголь-
никъ

никѢ же $abt = bgh =$ пятой части преу-
гольника abe или abc (129), и равенѢ
также пятой части правильнаго пяти-
угольника $bhikl$ (199); слѣдовательно пре-
угольникѢ $abc =$ пятиугольнику $bhikl$.

Примѣч. ТакимѢ образомѢ всякую плоскую фигу-
ру превраща сперва посредствомѢ предъидущихѢ
задачъ въ преугольникѢ; можно превращать въ же-
лаемой правильной многоугольникѢ.

316. ЗАДАЧА. Всякой неправильной
многоугольникѢ превратить въ ква-
дратѢ: на прим. пятиугольникѢ $abcde$.

Рѣшен и Доказ. Сперва данную фигуру
 $abcde$ преврати въ преугольникѢ bcg (308); ф.
а сей преугольникѢ преврати въ прямо- 228.
угольникѢ gg (286), наконецѢ прямоуголь-
никѢ gg превраща въ квадратѢ bl (294),
получишь желаемое.

317. ЗАДАЧА. Начертить фигуру
антпор подобну $abcde$, а равну данной B .

Рѣшен. Каждую изѢ данныхѢ фигурѢ ф.
 B также и $abcde$, преврати въ квадратѢ 229.
 fh и ak (316); на бокѢ квадрата al
сдѣлай $ah =$ боку ah квадрата fh равнаго
данной фигурѢ B ; изѢ точки h пропни
линію hm параллельно lb , проведя ac и
 ad , пропни лінію mn параллельно bc ,
 on параллельно dc , и op параллельно ed ,
при чемѢ будетѢ фигура антпор равна
данной B и подобна $abcde$.

Доказ.

Доказ. Понеже треугольникъ abl подобенъ треугольнику ahm ; того ради $al : am =$
 $ab : at$ (104), и $al : ah = ab : at$ (ариф. 245):
а фигура $abcde : атпор = ab : at$ (255),
поэтому $abcde : атпор = al : ah$; но $al =$
фигуръ $abcde$ по рѣшенію, слѣдовательно
 $атпор = ah =$ фигуръ B .

Примѣч. Такимъ образомъ всякая фигура въ правильной, или въ подобной неправильной многоугольникъ превращается.

318. ЗАДАЧА. Данной кругъ lh превратить въ квадратъ eg .

Рѣшен. и Доказ. Протяни радіусъ ab ,
ф. 230. на концѣ котораго поставь перпендикуляръ
 bc . раздѣли діаметръ bh на 12 равныхъ
частей, сдѣлай $bc = 355$ такимъ же частямъ;
протяни изъ c въ центръ a линію ac ,
будетъ треугольникъ $abc =$ данному кругу bh (255),
потомъ треугольникъ abc преврати въ прямоугольникъ
 be . Наконецъ прямоугольникъ be преврати
въ квадратъ eg (294), которой будетъ равенъ
данному кругу bh .

319. ЗАДАЧА. Квадратъ ab превратить въ кругъ.

Рѣшен. Раздѣли бокъ квадрата bc на
ф. 231 одиннадцати равныхъ частей, продолжи
 cb .

cb до d такъ, что бы bd была равна чептырнацати такимъ же частямъ; опиши на cd половину круга cde , изъ b поставь перпендикуляръ be , опиши кругъ eb , который будетъ равенъ данному квадрату ab .

Доказ. Понеже $cb : be = cb : bd$ (181) или $\pi : 14$ по рѣшенію, также и площадь круга $beg : be = \pi : 14$ (261), посему $cb : be = beg : be$ (ариф. 218); но $be = be$ слѣдовашельно кругъ $beg = cb$.

Примѣч. Сіѡ превращеніе квадрата въ кругъ, разсуждается по пропорціи діаметра къ окружности 7 : 22, которую изобрелъ Архимедъ: а понеже Мецѣво содержаніе діаметра къ окружности какъ 13 къ 355, ближе къ точности нежели 7 къ 22; того ради для вернѣйшаго превращенія квадрата въ кругъ, надлежитъ бокъ онаго раздѣля на 355 равныхъ частей, искать среднюю пропорціональную линію между 355 и 452, и взявъ оную за діаметръ сдѣлать кругъ, которой равенствомъ квадрату будетъ ближе перваго (255. примѣч.).

320. ЗАДАЧА. Кругъ abc превратить въ полкруга.

Рѣшен. Поставь изъ центра d на діам. ab перпендикуляръ dc , пропхни bc , продолжа оную до e , радіусомъ bc опиши полкруга cef , получишь желаемое.

Доказ. Понеже $db = dc$ и $db + (cd)db = bc = 2db$ (144), того ради bc вдвое больше

больше $\frac{-2}{bd}$, но площади круговъ содержатся между собою какъ квадраты радіусовъ, посему площадь кругу радіуса bc вдвое площади круга коего радіусъ bd , слѣдовательно половина круга $cef =$ площади круга abc .

321. ЗАДАЧА. Полкруга adb превратить въ кругъ.

Ф. Рѣшен. Поставь изъ центра c на діаметрѣ ab перпендикуляръ dc , пропями db , сдѣлай на оной кругъ, которой будетъ равенъ полкругу adb .

Доказ. Понеже луночка $debfd =$ треугольнику bcd (259), къ коимъ придавъ общій сегментъ $dbed$ будетъ полкруга $aef =$ четверти круга $cbcd$, слѣдовательно кругъ $dcbf =$ полкругу $adeb$.

322. ЗАДАЧА. Эллисисъ $acbd$ превратить въ кругъ.

Ф. Рѣшен. Свѣщи между ab и (cd) bf , среднюю пропорціональную линію be , раздѣляющую пополамъ опиши кругъ be , которой будетъ равенъ эллисису $acbd$ (279).

О СЛОЖЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ.

323. Начертитъ пятиугольникъ D равенъ даннымъ фигурамъ A и C .

Ф. Рѣшен. Преврати кругъ A въ квадратъ $324. f$, также и фигуру c въ квадратъ B (316.

(316.318), взявъ квадрапа f бокъ gh за основаніе, квадрапа B бокъ de за высоту gi , пропями линію ih , сдѣлай на оной квадрапѣ im ; копорой будетъ равенъ двумъ даннымъ фигурамъ A и C (144), потомъ квадрапъ im преврати въ пѣтї-угольникъ D (315), получишь желаемое.

324. ЗАДАЧА. Начертить фигуру Q , подобну и равну тремъ даннымъ подобнымъ между собою фигурамъ A , B и C .

Рѣшен. Взявъ бокъ hr фигуры C , за ф. основаніе ik , а бокъ fg фигуры B за вы- 236. соту il , пропями lk , на копорой поспавя перпендикуляръ $lm =$ боку de фигуры A , пропями mk , на копорой сдѣлай фигуру Q , подобну одной изъ данныхъ, получишь желаемое.

Доказ. Когда на линіе lk , начертишь фигуру подобную даннымъ: то она будѣтъ $=$ суммѣ двухъ фигуръ C и B (267); а на послѣдокъ фигура Q равна фигурѣ A , копорой основаніе $de = ml$ и равна таковой фигурѣ копорая равна суммѣ фигуръ C и B (267); слѣдовательно фигура Q равна суммѣ данныхъ фигуръ $A + B + C$.

Примѣч. Такимъ образомъ всѣ подобныя плоскостныя фигуры складываются. Когда жъ данныя фигуры будутъ не подобны; то должно ихъ превращать въ подобныя, и присложеніи поступать какъ въ прошедшихъ двухъ задачахъ показано.

О ВЫЧИТАНІИ ПЛОСКОСТЕЙ.

325. ЗАДАЧА. Квадратъ B вычестъ изъ квадрата A .

Ф. Рѣшен. На бокѣ большаго квадрата A ,
 237. опиши полкруга dce , отъ c до e положи бокѣ fg меньшаго квадрата; пропями ed , будетъ квадратъ eh разность между квадратами A и B .

Доказ. Понеже треугольникъ ced прямоугольной (91), того ради $A - B = eh$ (144).

Примѣч. Такимъ образомъ всякую подобную плоскостную фигуру изъ другой вычитать надлежитъ; когдажъ онѣ будутъ не подобны, то должно ихъ превращать въ подобныя, въ прочемъ поступать какъ въ сей задачѣ показано.

О УВЕЛИЧИВАНІИ ПЛОСКОСТЕЙ

326. ЗАДАЧА. Начертить треугольникъ въ два съ половиною раза больше треугольника abc , и что бы съ онымъ былъ одной высоты.

Ф. 238 Рѣшен. По продолженіи ab , сдѣлай $bd = \frac{1}{2} ab$, пропями линію dc , будетъ треугольникъ acd желаемой.

Доказ. Треугольникъ $abc : acd = ab : ad$ одной высоты ce (139), но $ab : ad = 1 : 2\frac{1}{2}$, посему треугольникъ $abc : acd = 1 : 2\frac{1}{2}$, слѣдовательно треугольникъ acd въ два съ половиною раза больше треугольника abc .
 327.

327. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc увели-
чить въ два раза и три четверти,
чтобъ былъ одного основанія.

Рѣшен. Раздѣли перпендикуляръ be на
четыре равныя части, продолжи оной до d Ф.
239.
такъ, что бы ed равна была $2\frac{3}{4} be$, пропяти
 ad и dc будетъ треугольникъ adc жела-
емой.

Доказ. Треугольникъ $abe : aed = eb : ed$
или $1 : 2\frac{3}{4}$; также и треугольникъ $bec : edc$
 $= eb : ed = 1 : 2\frac{3}{4}$, посему $abe : aed =$
 $bec : edc = 1 : 2\frac{3}{4}$ (ариф. 218); и треуголь-
никъ $(abe + bec)abc : (aed + edc)adc =$
 $1 : 2\frac{3}{4}$ (ариф. 241); слѣдовательно треуголь-
никъ adc въ $2\frac{3}{4}$ раза больше треугольника
 abc .

328. ЗАДАЧА. Начертить треуголь-
никъ, которой бы треугольника abc . въ
два раза и двѣ трети былъ болѣе, и
подобенъ оному.

Рѣшен. Раздѣли ab на три равныя час-
ти, продолжи ab до f такъ, чтобъ $af =$ Ф.
240
 $2\frac{2}{3} ab$, свѣщи между ab и af среднюю про-
порціональную линію ag , сдѣлай $ad = ag$,
пропяти de , въ параллель боку bc , будетъ
треугольникъ ade желаемой.

Доказ. Ибо изъ подобныхъ треуголь-
никовъ $abc : ade = ab : af$ (299); но af въ
 $2\frac{2}{3}$ болѣе ab , слѣдовательно и треуголь-
никъ ade въ $2\frac{2}{3}$ болѣе abc .

329. ЗАДАЧА. Начертить треугольникъ подобной данному abc , и что бы abc содержался къ оному, какъ линия af къ fg .

Ф. Рѣшен. Сыщи кѣ линіе cf , fg и кѣ
241. основанію ac четвертую пропорціональную линію ce (108); потомъ между основаніемъ ac и четвертою пропорціональною ce , сыщи среднюю ch (173); начерпи на оной треугольникъ chk подобенъ данному abc , получишь желаемое.

Доказ. Понеже $af:fg = ac:ce$ по рѣшенію, также и треугольникъ $abc:chk = ac:ce$ (299); следовательно треугольникъ $abc:chk = af:fg$ (ариф. 218) ч. д. н.

Примѣч. Такимъ образомъ всякая плоская фигура увеличивается въ содержаніи линій.

330. ЗАДАЧА. Начертить четверосторонникъ, котораго бы была плоскость въ трое большз, а бока онаго параллельны бокамъ ab , bc , cd и da даннаго четверосторонника $abcd$.

Рѣшен. Изъ произвольно взятой внутренней точки e , проводи во всѣ
Ф. углы линіи, продолжи eb до f такъ,
242. что бы $ef = 3eb$; потомъ сыщи между eb и ef среднюю пропорціональную линію eh , сдѣлай $eg = eh$, просяни gi параллельну bc , ik параллельну dc , kl парал-

параллельну ad , наконецъ проводи lg ; будетъ четверосторонникъ $gikl$ плоско-стью въ шрое больше даннаго $abcd$, и подобенъ оному.

Доказ. Понеже площадь четверосторонника $abcd : gikl = eb : ef$ (299); но ef въ шрое больше eb , слѣдовательно фигура $gikl$ въ шрое больше $abcd$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякая правильная и неправильная фигура увеличивается во столько разъ во сколько пошреуется.

331. ЗАДАЧА. Начертить фигуру подобну данной $abcdef$, что бы данная содержалась къ желаемой какъ 3 къ 5.

Рѣшен. Бокъ ab раздѣли на три равныя части, на продолженной ab сдѣлай ф. ag равну $\frac{2}{3} ab$, сыщи между ab и bg , по 243. есть 3 мя и 5ю частями среднюю пропорціональную линію bh . Сдѣлай $bn = bh$, проводи tn параллельну af , ml параллельну ef , lk параллельну ed , ki параллельну dc , будетъ фигура $bikltn$ желаемая.

Доказ. Ибо площадь фигуры $abcdef : bikltn = ab : bg$ (299), или какъ 3 : 5. ч. д. н.

Такимъ образомъ всякая подобная фигура увеличивается въ желаемомъ содержаніи чиселъ.

332. ЗАДАЧА. Къ фигурѣ $abcd$, которой площадь = 2850° квадратныхъ;
Н 2 при-

прирѣзать 1800° квадратныхъ, параллельно всѣмъ бокамъ.

Рѣшен. Данныя плоскости сложи вмѣстѣ, то есть $2850^\circ + 1800^\circ = 4650^\circ$, коихъ сумма будетъ означать площадь пребуемой фигуры; и такъ геометрическое содержаніе данной фигуры $abcd$, къ искомой будетъ $2850^\circ : 4650^\circ$; а по раздѣленіи каждого члена содержанія на такое число, на какое будетъ можно какъ здѣсь на 150, будетъ площадь данной фигуры $abcd$ содержать къ площади искомой фигуры какъ 19 : 31; по томъ изъ произвольно взятой внутри фигуры точки e , проводи во всѣ углы линіи, раздѣли какую нибудь изъ оныхъ на примѣрѣ eb на 19 равныхъ частей, продолжа eb сдѣлай $ef = 31$ такимъ же частямъ; сыщи между eb и ef среднюю пропорціональную линію eh , опредѣли $eg = eh$; напоследокъ пропями gi параллельну bc , ik параллельну cd , kl параллельну ad и проводи lg ; будетъ фигура $gikl$ пребуемая.

Доказ. Понеже площадь четвероспорочника $abcd : gikl = eb : ef$ (299) или $19 : 31 = 2850 : 4650$ порѣшенію; по сей причинѣ площадь фигуры $gikl = 4650^\circ$ квадр. а вычтя изъ оной площадь фигуры $abcd$, остатокъ 1800° квадр. будетъ пребуемая площадь, при рѣзанная въ параллель бокамъ данной фигуры.

Примѣч.

Примѣч. Такимъ образомъ ко всякой фигурѣ прирѣзывается, въ параллель бокамъ желаемое число квадратныхъ саженъ; или дается такая часть, какая потребуется какъ на прим. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$ и проч. данной фигуры.

О ДѢЛЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ

333. ЗАДАЧА. Раздѣлить треугольникъ abc , изъ угла b на три равныя части.

Рѣшен. Раздѣли основаніе ac на три равныя части въ d и e , пропни изъ b линіи bd и be получишь желаемое. ф. 244.

Доказ. Понеже треугольники bad , bde и bec , имѣютъ равныя основанія $ad = de = ec$ и одну высоту bf , слѣдственно равны между собою (129).

334. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ $abcd$ изъ угла c раздѣлить линіею cf на двѣ равныя части.

Рѣшен. Преврати четверосторонникъ $abcd$ въ треугольникъ cde (288), раздѣли ed въ f на двѣ равныя части, пропни cf , которая раздѣлитъ данной четверосторонникъ пополамъ. ф. 245.

Доказ. Понеже треугольникъ $cde =$ четверостороннику $abcd$, и треугольникъ $cef = cfd$ по рѣшенію, слѣдственно пре-
Н 3
уголь-

угольникъ $efd = \frac{1}{2}$ треугольника $ced = \frac{1}{2}$,
четверосторонника $abcd$.

Ф. Примѣч. Когда точка f будетъ внѣ четверо-
246. сторонника; то проводи fg въ параллель ac , и про-
пяти cg , которая раздѣлитъ четверосторонникъ $abcd$
пополамъ; ибо треугольникъ $acf = acg$ (129), а
придавъ къ симъ треугольникъ acd , будетъ тре-
угольникъ $(acf + acd) efd = (acg + acd) agcd$, но
треугольникъ $efd = \frac{1}{2} ced = \frac{1}{2} abcd$ по рѣшенію
(333), слѣдовательно $agcd = \frac{1}{2}$ четверосторонника
 $abcd$.

335. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ $abcd$
изъ угла c раздѣлить линіями на
три равныя части.

Рѣшен. Преврати четверосторонникъ
Ф. $abcd$ въ треугольникъ cde (288), раздѣли
247. основаніе ed на три равныя части, въ
 g и f , проводи cf , и fg параллельно ac , по-
томъ пропяти hc и gc , коими фигура
 $abcd$ раздѣлится на желаемое число ча-
стей.

Доказ. Понеже треугольникъ $gcd = gcf$
 $= fce = \frac{1}{3}$ фигуры $abcd$ по рѣшенію (333);
и треугольникъ $ach = acf$ (129), придай
къ симъ треугольникъ acg , будетъ
 $(ach + acg) agch = (acf + acg) gcf = \frac{1}{3}$
фигуры $abcd$; посему $cgd + agch = \frac{2}{3} adcb$,
слѣдственно треугольникъ $chb = \frac{1}{3} abcd$.

336. ЗАДАЧА. Пятиугольникъ $acbed$
изъ угла a раздѣлить на три равныя
части. Рѣшен.

Рѣшен. Преврати пятиугольникъ $acbed$ Ф. 248.
въ треугольникъ afg (307); раздѣли fg на
три равныя части, въ h и i , прояди ли-
нѣи ai и hk въ параллель ab , а изъ k въ
 a линѣю ak , причеѣ пятиугольникъ $acbed$
линѣями ai и ak раздѣлится на три равныя
части.

Доказ. Треугольникъ $aed = aeg$ (129),
а придавъ къ симѣ треугольникъ aie бу-
детъ $(aed + aie) : ied = (aeg + aie) : eig$
 $= \frac{1}{3} afg = \frac{1}{3}$ пятиугольника $acbed$. Также
треугольникъ $abh = abk$ (129), придай
къ симѣ треугольникъ abi , будетъ
 $(abh + abi) : aih = (abk + abi) : aik$
(ариф. 33) $= \frac{1}{3} afg = \frac{1}{3}$ пятиугольника
 $acbed$; посему и $ake = \frac{1}{3}$ пятиугольника
 $acbed$,

337. ЗАДАЧА. Пятиугольникъ bm изъ
угла a , раздѣлитъ на четыре равныя
части.

Рѣшен. Преврати пятиугольникъ bm Ф. 249.
въ треугольникъ $ab4$, раздѣли $b4$ на че-
тыре равныя части въ точкахъ $1, 2, 3$,
прояди ah и $3n$ въ параллель ac , а изъ
 a въ $1, h$ и n линѣи $a1, ah$ и an , кои-
ми пятиугольникъ bm раздѣлится на же-
лаемыя части.

Доказ. Проведи линѣи $a2, a3$, будетъ
треугольникъ $ab1 = 1a2 = 2a3 = 3a4$ (129)
 $= \frac{1}{4}$ треугольника $ab4$, или $= \frac{1}{4}$ пяти-
уголь-

угольника bm по рѣшенію; но преугольникъ $ca2 = cha$ (129), придай къ онымъ преугольникъ $ca1$ будетъ преугольникъ $(ca1 + ca2) 1a2 = (ca1 + cha) 1cha = \frac{1}{4}$ пятиугольника bm ; также преугольникъ $ac3 =$ преугольнику acn (129), опѣими опѣ сихъ преугольникъ $ac2 = ach$, оспанешся $ac3 - ac2 = acn - ach$, шо есть $2a3 = ann = \frac{1}{4}$ пятиугольника bm , слѣдствен-но $annt = \frac{1}{4}$ пятиугольника bm .

338. ЗАДАЧА. Отъ многоугольника aec , изъ угла b отрѣзать пять шестинъ.

Рѣшен. Преврати многоугольникъ aec , ф. 230 въ преугольникъ abh (308); опдѣли опѣ ah линію af равну $\frac{2}{3} ah$ (112), просяни fk въ параллель be , kd въ параллель bg , а изъ b въ d линію bd , которая опѣ фигуры $aegc$ опдѣлитъ желаемую часть $abdg$.

Доказ. Треугольникъ $bef = bek$ (129), придай къ симъ треугольникъ aeb , будетъ $(aeb + bef) abf = (bek + aeb) aekb$, треугольникъ же $bkg =$ треугольнику bgd , а придавъ къ онымъ фигуру $aegb$, будетъ $(bkg + aegb) aekb = (bgd + aegb) aegdb$ (ариф. 33); слѣдовательно фигура $aegdb =$ треугольнику abf (ариф. 32); но треугольникъ $abf = \frac{5}{6}$ треугольника $abh = \frac{5}{6}$ многоугольника aec , слѣдовательно и фигура $aegdb = \frac{5}{6}$ многоугольника aec .

339 ЗАДАЧА. Раздѣлить многоуголь-
никъ be , линіею ao на двѣ равныя
части.

Рѣшен. Преврати многоугольникъ be въ
треугольникъ aef (312), раздѣли ef въ ф. 251
г пополамъ. Пропяни ag и dl въ парал-
лель gc , ol въ параллель ac , проводи изъ
 a въ o линію ao , которая раздѣлитъ
фигуру be на желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $gcl = gcd$, и тре-
угольникъ $cla =$ треугольнику coa (129),
къ суммѣ первыхъ и послѣднихъ двухъ
придай фигуру $gsaeg$, будетъ $gcl + cla +$
 $gsaeg = gcd + coa + gsaeg$, то есть тре-
угольникъ $age =$ фигурѣ $aocde$; но тре-
угольникъ $age = \frac{1}{2}$ треугольника $aef = \frac{1}{2}$
фигуры be по рѣшенію, слѣдовательно и
фигура $aocde = \frac{1}{2}$ фигуры be .

Примѣч. Когда точка g будетъ находится внѣ-
данной фигуры be ; то продолжа ag , проводи dh въ ф.
параллель gc , и hk въ параллель ac , точки k и a со- 252
едини прямою линіею ak , которая фигуру be раздѣ-
литъ на двѣ равныя части. Ибо треугольникъ $clh =$
четверостороннику $clgd$ по рѣшенію, и треугольникъ
 $akc =$ треугольнику $ach = acd + (clh)clgd =$ фигурѣ
 $acdga$; а когда къ первому и послѣднему изъ сихъ при-
дашь фигуру $acdea$, будетъ $akc + acdea = acdga + acdea$,
то есть фигура $akcdea =$ треугольнику age ; но
треугольникъ $age = \frac{1}{2}$ треугольника $aef = \frac{1}{2}$ фи-
гуры be ; слѣдовательно и фигура $akcdea = \frac{1}{2}$ фи-
гуры be .

340. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , изъ точки d лежащей на основаніи ab , раздѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Раздѣли cb на три равныя части въ i и e , прояди ih и eg въ параллель линіе dc , потомъ проведи dh и dg , которыми треугольникъ abc раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ cdi = треугольнику cdh (129), къ симъ треугольникамъ придай треугольникъ acd , будетъ $cdi + acd = ach + acd$, то есть треугольникъ aci равенъ четвероугольнику $achd$; также треугольникъ $cge = dge$ (129), а когда къ онымъ придашь треугольникъ egb , то будетъ $cge + egb = dge + egb$, то есть треугольникъ $cfe = gld$; но треугольникъ aci = треугольнику $cbe = \frac{1}{3}$ треугольника acb по рѣшенію, по сему четвероугольникъ $achd = dgb = \frac{1}{3}$ треугольника acb , слѣдовательно и $agh = \frac{1}{3} acb$.

341. ЗАДАЧА. Не правильной пятиугольникъ abd , изъ точки f лежащей на основаніи, раздѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Преврати пятиугольникъ въ ф. треугольникъ cdh (307), раздѣли ch на 54. три равныя части въ e и g , прояди ei и gh въ параллель df , потомъ проведи fi

fi и fh , которыя раздѣляютъ пятиуголь-
никъ abd на три равныя части.

Доказ. Поелику пятиугольникъ $abldk$,
линіями de и dg раздѣленъ на три рав-
ныя части (336); треугольникъ же eif
 $= eid$ (129), придай къ симъ фигуру
 $aeik$, будетъ $eif + aeik = eid + aeik$, то
есть фигура $afik =$ фигурѣ $aedk$; но $aedk$
 $= \frac{1}{3}$ пятиугольника adb , посему $afik = \frac{1}{3}$
пятиугольника adb . Также треугольникъ
 $fgh =$ треугольнику ghd , а придавъ къ
онимъ фигуру gbh , будетъ $fgh + gbh = ghd$
 $+ gbh$ то есть фигура $fbh = gbd$, но
 $gbd = \frac{1}{3}$ пятиугольника ald по рѣшенію
(336), посему и фигура $fbh = \frac{1}{3}$ пяти-
угольника abd , слѣдовательно фигура $fidh$
 $= \frac{1}{3}$ пятиугольника abd .

342. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , изъ
точки d лежащей внутри онаго, раз-
дѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Раздѣли ac на три равныя час-
ти въ h и f , пропяти изъ b , be и bg Ф. 255
въ параллель dh и df , потомъ проведя ed ,
 dg и db треугольникъ abc раздѣлится
въ желанныя части.

Доказ. Треугольникъ $ebh = ebd$ (129),
а когда придашь къ нимъ треугольникъ
 eab , будетъ $(ebh + eab)abh = (ebd + eab)$
 $abde$. Треугольникъ $bfg = bgd$ (129), при-
давъ къ симъ треугольникъ bgc будетъ
 $(bfg + bgc)bcf = (bgd + bgc)bcgd$ (ариф. 33);
но

но треугольникъ $abh = bcf = \frac{1}{3} abc$ по рѣшенію (333), чего ради фигура $abdc =$ фигурѣ $bcdg = \frac{2}{3}$ треугольника abc ; следовательно и треугольникъ $egd = \frac{1}{3}$ треугольника abc .

343. ЗАДАЧА. Не правильной пятиугольникъ $aibco$, изъ точки f лежащей внутри онаго, раздѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Преврати пятиугольникъ въ Φ . 256. треугольникъ fgn (313), раздѣли gn на три равныя части въ d и l . Протяни de въ параллель fi , km въ параллель af , mn въ параллель fo ; потомъ проведя fl , fe и fn пятиугольникъ раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $fid = fie$ (129), придай къ симъ треугольникъ fli , будетъ $fid + fli = fie + fli$ (ариф. 33), то есть треугольникъ $fld =$ фигурѣ $flic$. Также треугольникъ $afn = afm$, а придавъ къ онымъ треугольникъ afl , будетъ $lfh = lfma$; треугольникъ же $ofm = ofn$ (129), придай къ онымъ фигуру $alfo$, будетъ $lfm = lfno$, = треугольнику lfh ; но треугольникъ $fld = fhn = \frac{1}{3}$ пятиугольника abo по рѣшенію; чего ради и фигура $flic = lfno = \frac{1}{3}$ пятиугольника abo , следовательно и фигура $fbcn = \frac{1}{3}$ пятиугольника abo .

Примѣ.

Примѣч. Такимъ образомъ мною правильные и
и правильные многоугольники изъ точки въ равныя,
ж въ данной пропорціи части дѣлятся надлежитъ.

344. ЗАДАЧА. Въ Треугольникѣ abd ,
сыскать точку, изъ которой бы прове-
денными во все углы линиями тре-
угольникъ abd раздѣлился на три рав-
ныя части.

Рѣшен. Изъ третей части основанія
 ad , проведя ef параллельно къ ab , раз-
дѣли оную въ точкѣ e пополамъ, изъ
которой проведенныя въ углы линіи ea ,
 eb и ed раздѣляютъ треугольникъ abc на
три равныя части.

Ф.
257.

Доказ. Ибо треугольникъ $abe = \frac{1}{3}$ тре-
угольника abd (333) $=$ треугольнику abc
(129), при томъ для параллельныхъ
линій ab и ef и что $ae = ef$, треуголь-
никъ $esa = efb$, и треугольникъ $ecd =$
 efd (129), посему треугольникъ $esa + ecd$
 $= efb + efd$, то есть, треугольникъ aed
 $= bed = \frac{1}{3}$ треугольника abd .

345. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc раз-
дѣлить на три равныя части линія-
ми въ параллель основанію ac про-
веденными.

Рѣшен. Раздѣли бокъ ab на три рав-
ныя части въ d и e , сыщи между bd и
 be , и между be и ba , среднія пропор-
ціональныя bg и bh ; сдѣлай $br = bg$ и br
 $= bh$,

Ф.
258.

$= bh$, потомъ проводи линіи rv и pf параллельно кѣ ac , кои раздѣляшъ треугольникъ abc , на три разныя части.

Доказ. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ $abc : bvr = ab : bd$ (299): но $bd = \frac{1}{3} ab$, посему и треугольникъ $bvr = \frac{1}{3} abc$. Также $abc : bfr = ab : be$ (299): но $be = \frac{2}{3} ab$, того ради и треугольникъ $bfr = \frac{2}{3} abc$, слѣдственно и часть $prfc = \frac{1}{3} abc$.

346. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc раздѣлитъ параллельными линіями io , и kr на три части, въ содержаніи линій d , e и f .

Рѣшен. Сдѣлай на ac по произволению уголъ $асп$, опредѣли опъ c линію cl равную f , lq равную e , qn равную d , пропями изъ l линію lm , изъ q линію qh въ параллель ap ; сыщи между ca и cm среднюю ci , также между ca и ch среднюю ck ; пропями линіи io и kr въ параллель ab , которыя раздѣляшъ треугольникъ abc въ жедаемыя части.

Доказ. Понеже изъ подобныхъ треугольниковъ $abc : ioc = ac : ic$ (299), и треугольникъ $abc : bst = ac : ic$ (139), посему $abc : ioc = abc : bst$ (ариф. 229); но $abc = abc$, слѣдственно $ioc = bst$ (ариф. 248), треугольникъ $abc : kpc = ac : ch$ (299), и треугольникъ $abc : bhc =$

$ac : ch$ (139), по сему $abc : kpc = abc : bhc$ (ариф. 229); но $abc = abc$, того для и $kpc = lhc$, а когда опѣ сихъ послѣднихъ опѣмешъ $ioc = nbc$, то будетъ $kpc - ioc = bhc - nbc$, то есть $kpoi = lhn$, по сей причинѣ и $abrk = aln$; но $bmc : bnh : abh = mc : nh : n$ (139) или $(lc) f : (ln) e : (qn) d$, слѣдовательно $ioc : iork : pkb = f : e : d$.

347. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , раздѣлить на двѣ равныя части, перпендикуляромъ къ основанію ab проведеннымъ.

Рѣшен. Опустя перпендикуляръ cd , ф. сыщи между большею частію ad и половиною основанія $ab = ae$ среднюю пропорціональную ah . Сдѣлай $af = ah$, изъ точки f поставленной перпендикуляръ fg раздѣлитъ треугольникъ acb на двѣ равныя части. 268.

Доказ. Ибо треугольникъ $adc : ace = ad : ae$ (139), а изъ подобныхъ треугольниковъ $adc : afg = ad : ae$ (299); по сему $adc : ace = adc : afg$; но $adc = adc$ по сему $ace = afg = \frac{1}{2}$ треугольника ab .

Примѣч. Если пошребно будетъ опѣ треугольника abc , перпендикуляромъ fg опѣлить $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ и проч. часть; тогда опѣ линіи ab взявъ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, и проч. часть $= ae$, сыщи между оною частію и перпендикуляромъ ad среднюю пропорціональную $ah = af$, а на послѣдокъ поставленнымъ изъ точки f перпендикуляромъ fg опредѣлиши желаемая часть. 348.

348. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ abc , провести линію gf параллельно кѣ ac такъ, что бы треугольникъ gbf равенъ былъ данной фигурѣ B , которая меньше треугольника abc .

Ф. Рѣшен. Данную фигуру B преврати въ
261. треугольникъ, потомъ преврати оной въ треугольникъ abd по основанію ab и углу abc (298), сыщи между bc и bd среднюю пропорціональную be , опредѣли $bf = be$, изъ точки f проводи fg параллельно кѣ ac , будетъ треугольникъ $gbf =$ фигурѣ B .

Доказ. Треугольниикъ $abc : abd = bc : bd$ (139), а изъ подобныхъ треугольниковъ $abc : bgf = bc : bd$ (299), по сему $abc : abd = abc : bgf$; но $abc = abc$, чего ради и $abd = bgf =$ фигурѣ B .

349. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc изъ точекъ d и e , раздѣлитъ на три равныя части.

Ф. Рѣшен. Сдѣлай $af = \frac{1}{3} ac$, изъ точки
262. f проводи fh параллельно кѣ db , и просяни dh потомъ раздѣли dc пополамъ въ g , просяни gk параллельно eh , проводи ek ; треугольникъ abc линіями dh и ke раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Треугольникъ $bdf = bdh$ (129), и $dbf + abd = bdh + abd$ (ариф. 33), то есть треугольникъ $abf =$ фигурѣ $abhd$: но
пре-

треугольникъ $abf = \frac{1}{3} abc$ по рѣшенію, посему и фигура $abhd = \frac{1}{3} abc$. Также треугольникъ $ehg = ehk$ (129), и $ehg + ehc = ehk + ehc$ (ариф. 33), то есть треугольникъ $gch =$ фигурѣ $echk$; но треугольникъ $gch = \frac{1}{2} dhc = \frac{1}{3} abc$ по рѣшенію, посему и фигура $echk = \frac{1}{3}$ треугольника abc .

350. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ ac изъ точекъ k и h раздѣлитъ на три равныя части.

Рѣшен. Данной четверосторонникъ ac преврати въ треугольникъ ade . Раздѣли ae на три равныя части въ g и f , прояди fd и gd ; которыя раздѣлятъ треугольникъ ade на три равныя части (333), прояди fi въ параллель hd , и gl въ параллель kd ; а напоследокъ проведи hi и kl , фигура $abcd$ раздѣлится въ желаемыя части. ф. 263.

Доказ. Треугольникъ $dhf = dni$ (129), посему треугольникъ $dhf + dha = dhi + dha$, то есть треугольникъ $adf =$ фигурѣ $adih$: но треугольникъ $adf = \frac{1}{3}$ треугольника $ade = \frac{1}{3}$ четверосторонника ac , посему и $adih = \frac{1}{3}$ четверосторонника ac . Треугольникъ $dkg = dkl$ (129), посему треугольникъ $dkg + dka = dkl + dka$, то есть треугольникъ $adg =$ фигурѣ $adlk$, и треугольникъ $adg - adf = adlk - adih$, то есть треугольникъ $dfg =$ фигурѣ $hilk = \frac{1}{3} ade =$

Часть II О $\frac{1}{3}$ чеве-

$\frac{1}{3}$ четвероспоронника ac ; посему и часть $k/cb = \frac{1}{3}$ четвероспоронника $adcb$.

351. ЗАДАЧА. Трапецію ac , линіями раздѣлитъ на четырьѣ равныя части.

ф. Рѣшен. Раздѣли dc и ab на четырьѣ
264. равныя части въ e, f, g и h, i, k , проведи линіи he, if и gk ; которыми трапеція ac раздѣлилася въ желаемыя части.

Доказ. Ибо треугольникѣ $ade = elf = fig = gkc$, также треугол. $ach = hfi = igk = kcb$ (129), посему часть $adeh = hefi = fikg = kgc$ равны между собою, слѣдовательно каждая $= \frac{1}{4}$ трапеціи ac .

352. ЗАДАЧА. Въ треугольникѣ abc сыскать точку p , изъ которой бы проведенныя параллельно къ бокамъ ab и bc линіи, отдѣлили какую нибудь часть треугольника abc . На прим. $\frac{2}{3}$.

ф. Рѣшен. Взявъ на основаніи ac произвольную точку g , проведи bg , раздѣли оную
265. на пять равныхъ частей (ю 2); между $\frac{2}{3} bg = gk$ и всѣю bg сыщи среднюю пропорціональную gi , опредѣли $gp = gi$, точка p будетъ желаемая; изъ которой проведя pd и pf параллельно къ ab и bc , опредѣлилася треугольникѣ $pdf = \frac{2}{3} abc$.

Доказ. Ибо отъ сочиненія треугольники dpf и abc подобны, посему треугольникѣ

угольникъ $abc : dpf = bg : gk$ (299) :
но $gk = \frac{2}{3} bg$, слѣдовательно и $dpf = \frac{2}{3} abc$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякой треугольникъ дѣлится на произвольное число равныхъ частей, или отъ онаго какая угодно часть отрѣзывается, естли только сыщется средняя пропорціональная линія между bg и такою частію оной, какая потребна часть треугольника.

353. ЗАДАЧА. Отъ данной фигуры afc отдѣлить $\frac{2}{3}$, что бы бока желаемой фигуры, были параллельны бокамъ данной, а основаніе было бы въ основаніи af .

Рѣшен. Изъ произвольно взятой на основаніи cf точки g , проводи во всѣ углы линіи bg , cg , gd и ge , раздѣли bg на три равныя части. Между bg и $\frac{2}{3} bg = gi$ сыщи среднюю пропорціональную gh , сдѣлай $gk = gh$, пропями kp , kl , lm , mn и no въ параллель бокамъ ab , bc , cd , de и ef , получишь желаемое. Ф.
266.

Доказ. Ибо по сочиненію треугольники данной фигуры afc подобны треугольникамъ определенной фигуры pql , посему фигура acf подобна plo (241); того ради фигура $acf : plo = bg : ig$ (299) : но $gi = \frac{2}{3} bg$, слѣдовательно и фигура $plo = \frac{2}{3}$ фигуры acf .

354. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ $abcd$ раздѣлить на три равныя части такъ,

О 2

что бы

что бы одна часть отдѣлена была параллельною, а другія двѣ перпендикулярною линіею къ основанію ad .

Ф. 267. Рѣшен. Четверосторонникъ $abcd$, преврати въ треугольникъ ado . Сдѣлай $ol = \frac{1}{3}od$, проводи al , треугольникъ aol будетъ $= \frac{1}{3}$ треугольника $ado = \frac{1}{3}abcd$ (333), продолжи ab и dc пока взаимно пересѣкутся въ точкѣ t , между td и tl сыщи среднюю пропорціональную tn , опредѣли $tf = tn$; изъ f просяни линіею fe параллельно къ основанію ad . Потомъ раздѣля ef и ad пополамъ въ точкахъ i и k проводи ik , чрезъ середину сей линіи просяни hg перпендикулярно къ основанію ad , получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ $adm : mef = dm : ml$ (299), и треугольникъ $adm : alm = dm : ml$; и такъ для равенства содержаній будетъ $adm : mef = adm : alm$; но $adm = adm$, по сему $mef = alm$; а опнявъ отъ оныхъ равныя треугольники $bmc = ota$, останетсѣя $mef - bmc = alm - ota$, то естъ четверосторонникъ $ebcf = aol$: но $aol = \frac{1}{3}aod = \frac{1}{3}abcd$ порѣшенію, слѣдовательно и $ebcf = \frac{1}{3}abcd$. Трапеція $aefd = \frac{2}{3}abcd$ линіею ik раздѣлена пополамъ (351); треугольникъ же $pgi = phk$, потому что $ip = pk$, уголъ $gip = pkh$ (53), и уголъ $ipg = hpk$ (20); чего ради $gfdh = ifdk = aegh = \frac{1}{3}abcd$.

Примѣч.

Примѣч. Ежели угодно будетъ какой нибудь треугольникъ на при. amd раздѣлить такимъ же образомъ на три части: то надлежитъ сперва сыскашь между md и $\frac{1}{3}$ ю оной, среднюю пропорціональную tn , которую положа на бокъ md , проведешь параллельную ef , потомъ остатокъ дѣйствія совершивъ попрежнему.

355. ЗАДАЧА. Треугольникъ abc , изъ точки d лежащей внѣ онаго, раздѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Раздѣли треугольникъ abc на три равныя части линіями se и sf (333); потомъ треугольникъ sbe преврати въ другой ikb (303), то же самое сдѣлай и съ треугольникомъ cbf ; при чемъ треугольникъ abc линіями ik и hg раздѣлится на три равныя части. ф. 268.

Доказ. Ибо треугольникъ $esc = ikb$, и треугольникъ $cbf = gbh = \frac{1}{3} abc$ по рѣшенію (303); также треугольникъ $esc - fcb = ikb - gbh$, то есть треугольникъ $escf = ikgh = \frac{1}{3} abc$, слѣдственно, и четверосторонникъ $acki = \frac{1}{3} abc$.

356. ЗАДАЧА. Изъ точки n лежащей внѣ трапеціи $abcd$, раздѣлить оную на три равныя части.

Рѣшен. Раздѣли ad и bc на три равныя части въ g , h и e , f , проводи eg и fh , коими трапеція $abcd$ раздѣлится на три равныя части (351); потомъ изъ точки n чрезъ ф. 259.

О 3

 средину

середину линіи ge и середину линіи fh проведи прямыя линіи pk и pl , коими прапещія раздѣлишся въ желаемыя часпи.

Доказ. Треугольникъ $keo = goi$, потому что $oe = og$, уголъ $keo = ogi$ (53), и уголъ $koe = goi$ (20); посему треугольникъ $keo + abkog = ogi + abkog$ (ариф. 33), то есть $abeg = abki = \frac{1}{3} abd$, такимъ же образомъ докажется что $dclm = dcfh = \frac{1}{3} abc$.

357. ЗАДАЧА. Неправильной пятиугольникъ $abcde$ изъ точки o лежащей внѣ онаго, раздѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Преврати пятиугольникъ $abcde$ въ треугольникъ hci (307), раздѣли hi на три равныя часпи въ f и g , пропаяни cf и cg , коими пятиугольникъ $acde$ раздѣлишся на три равныя часпи (336). Продолжи hi въ обѣ стороны, также bc и cd , пока пересѣкутся съ продолженною въ q и p . Преврати треугольникъ cfq въ другой knq , что бы онаго бокъ kn былъ въ прямой линіе съ точкою o (303). Равнымъ образомъ преврати треугольникъ cgr въ другой mlr (303), при чемъ линіи nk и ml , раздѣляшъ фигуру въ желаемыя часпи.

Доказ. Понеже треугольникъ $cfq = knq$, треугольникъ $cgr = mlr$ по рѣшенію (303), а отнявъ отъ первыхъ двухъ общую фигуру

гуру $krfq$, а отъ послѣднихъ фигуру $lsgp$, останется треугольникъ $kcr = rfn$, треугольникъ $cls = msg$; посему $(kcr + bkrfa) abcf = (rfn + bkrfa) abkn = \frac{1}{3}$ пятиугольника $abcde$; также $(cls + lsged) cged = (msg + lsged) lmed = \frac{1}{3}$ пятиугольника $abcde$, слѣдовательно и $nkclm = \frac{1}{3} abcde$.

358. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ $abcd$, раздѣлить на двѣ равныя части линіею ik , параллельною боку cd .

Рѣшен. Продолжи бока ad и bc , кои ф. пересѣкутся въ f . Преврати четверосто- 271. ронникъ ac въ треугольникъ cde ; раздѣли de въ h пополамъ; между df и fh сыщи среднюю пропорціональную fg , опредѣли $fi = fg$, изъ i пропни ik въ параллель боку cd , которая раздѣлитъ фигуру $abcd$ въ желаемыя части.

Доказ. Понеже треугольникъ $cdf : chf = fd : fh$ (139), также треугольникъ $cdf : ikf = fd : fh$ (299); и для равенства содержаній будетъ треугольникъ $cdf : chf = cdf : ikf$; но $cdf = cdf$, посему $chf = ikf$, отъ коихъ опнявъ общій четверосторонникъ $fk lh$, останется треугольникъ $kcl = hli$; треугольникъ же $kcl + clid = hli + clid$, то есть треугольникъ $chd = kcdi = \frac{1}{2} abcd$, слѣдовательно и $abki = \frac{1}{2} abcd$.

359. ЗАДАЧА. Четверосторонникъ $abcd$ раздѣлить на три равныя части линіями параллельными боку ab .

Рѣшен. О 4

ф.
272.

Рѣшен. Продолжи бока ad и bc кои пересѣкутся въ f , преврати чешвероспоронникъ $abcd$ въ треугольникъ dce , раздѣли de въ g и h на три равныя части, изъ h и g проводи hc и gc , коими чешвероспоронникъ $abcd$ раздѣлится на три равныя части. Треугольникъ chd преврати въ другой lmd , что бы онаго бокъ ml былъ параллеленъ боку ab ($\angle o$); такимъ же образомъ преврати треугольникъ cgf въ другой fki ($\angle o$), получишь желаемое.

Доказ. Ибо треугольникъ $cfg = fki$ по рѣшенію ($\angle o$), отъ коихъ отнявъ фигуру $kogf$, будетъ треугольникъ $kco = goi$ и $kco + kogab = goi + kog.b$, то есть $bcoa = bkia = ceg = \frac{1}{3} abcd$; также и треугольникъ $chd = lmd = \frac{1}{3} abcd$ по рѣшенію, слѣдовательно и $mlcki = \frac{1}{3} abcd$.

360. ЗАДАЧА. Отъ фигуры $afesb$, отрѣзать двѣ трети.

Рѣшен. Раздѣли бокъ ab на три равныя части, сыщи между ab и $\frac{2}{3}ab = am$,
273. среднюю пропорціональную an , опредѣли $al = an$, изъ a протяни дѣгонали ac , ad и ae ; изъ l линію lk въ параллель боку bc , изъ k линію ki въ параллель cd , изъ i линію ih въ параллель de , изъ h линію hg въ параллель ef , будетъ фигура $alkhg$ желаемая.

Доказ.

Доказ. Ибо изъ подобныхъ фигуръ $abcdef : alking = ab : at$ (299); но $at = \frac{2}{3} ab$, слѣдовательно и фигура $alking = \frac{2}{3}$ фигуры $abcdef$.

Примѣч. Такимъ образомъ отъ всякой правильной и неправильной прямолинейной фигуры отрѣзывается желаемая часть.

361. ЗАДАЧА. Правильной шестигуольникъ al раздѣлить на четыре равныя части въ параллель дѣгонали cd .

Рѣшен. и Доказ. Раздѣли трапецію ac равно и трапецію ct , на двѣ равныя части Φ . въ параллель дѣгонали cd (358), получишь 274. желаемое.

362. ЗАДАЧА. Правильной пятіугольникъ $abcde$, параллельными всѣмъ бокамъ линіями, раздѣлить на три равныя части.

Рѣшен. Протяни изъ центра m во всѣ углы радіусы, раздѣли mc на три равныя части въ g и i , сыщи среднюю пропорциональную ml между mc и mg , также между mc и mi среднюю mk , опредѣли $mf = ml$, и $mh = mk$; проводи изъ f и h линіи въ параллель бокамъ cd , ed , и прочая получишь желаемое. Φ . 275.

Доказ. Изъ подобныхъ фигуръ $abcde : fn = mc : mg$; но $mg = \frac{1}{3} mc$, посему и пятіугольникъ $fn = \frac{1}{3} abcde$, также $abcde : ho = mc$
 О Б

$\equiv mc : mi$ (299); но $mi = \frac{2}{3} mc$, слѣд-
ственно $ho = \frac{2}{3} abcde$, посему $ho - fn = \frac{1}{3}$
 $abcde$.

Примѣч. Такимъ же образомъ всякую неправиль-
ную фигуру раздѣлить можно на произвольное чис-
ло частей, ежели вмѣсто центра возьмется внутри
фигуры произвольно точка и проведутся изъ оной
во всѣ углы линіи, а ошпашокъ дѣйствія совер-
шится попрежнему.

363. ЗАДАЧА. Многоугольникъ bv ,
изъ точки d раздѣлить на двѣ части
въ содержаніи линій g и h .

Рѣшен. Преврати многоугольникъ bv
въ преугольникъ bck (312), раздѣли bk
въ m въ содержаніи линій g и h (III),
протяни cm , продолжи cp , проводи mo въ
параллель cd , oi въ параллель dp , точки
 i и d соедини прямою линіею di , копо-
рая раздѣлитъ многоугольникъ bv въ же-
лаемые части,

Доказ. Треугольникъ $cdm = cdo$ (129),
и $cdm + cdb = cdo + cdb$ (ариф. 33), по
есть $bcm = bcod$; преугольникъ же pdo
 $\equiv pdi$ (129), и $pdo + pdbc = pdi + pdbc$,
по есть фигура $bcpid = bcod$ (ариф. 33)
 \equiv преугольнику bcm ; но $bcm : cmk =$
 $bm : mk$ или $h : g$, преугольникъ же bcm
 \equiv фигурѣ $bcpid$, посему и фигура $div =$
преугольнику cmk , чего ради (bcm)
 $bcpid : (cmk) div = h : g$.

Примѣч.

Примѣч. Такимъ же образомъ всякая неправильная фигура дѣлится въ данномъ содержаніи чиселъ. На прим. 4 : 9 и проч.

364. ЗАДАЧА. Многоугольникъ $abfc$ изъ точки n раздѣлить на двѣ части въ содержаніи $an : nb$.

Ф.
277.

Рѣшен. Протяни изъ e линію ho параллельну ab , преврати многоугольникъ cf въ трапецію ob (311); раздѣли ho въ i какъ ab раздѣлена въ n (по), проводи il въ параллель ne , наконецъ точки i и n соедини прямою линіею nl , получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ $apo : nbh = an : nb$ и треугольникъ $oni : ikn = oi : ik$ (139) $= an : nb$ по рѣшенію, посему для равенства содержаній, треугольникъ $apo : nbh = ion : ikn = an : nb$; причемъ ($apo + oin$) $anio : (nbh + ikn) nbhi = an : nb$ (ариф. 241): но четверосторонникъ $neoa =$ фигурѣ $nedca$ по рѣшенію, и треугольникъ $nei = nel$ (129), чего для $neoa - nei = nedca - nel$, то есть четверосторонникъ $anio =$ фигурѣ $anldc$, посему фигура $nbfel =$ четверостороннику $nbhi$, слѣдственно ($anio$) $anldc : (nbhi) nbfel = an : nb$.

365. ЛЕММА. Разность двухъ квадратовъ $aseh$ и $abdg$, равна квадрату изъ средней, между суммою и разностію боковъ тѣхъ же квадратовъ.

Рѣшен.

Ф.
278.

Рѣшен. Продолжи eh до k такъ, чтобы hk была равна ab , протяни ki въ параллель es , продолжи dg пока пересѣчется съ линіями ik и es въ i и f ; будетъ по положенію $ac + ab = eh + hk = ek$ и $ac - ab = ah - ag = hg = ki$, по сему прямоугольника $ekif$ основаніе $ek =$ суммѣ, а высота $ik =$ разности боковъ двухъ квадратовъ. Прямоугольники жъ bf и gk сдѣланные изъ равныхъ линій $bd (ab) = hk$ и $bc = ac - ab = ah - ag = hg$ равны между собою, къ копорымъ придавъ прямоугольникъ fh , будетъ $cd + fh =$ разности двухъ квадратовъ ac и ab и $abd =$ прямоугольнику fk ; но прямоугольникъ $fk =$ квадрату kn (172); слѣдовательно разностьъ квадратовъ ac и ab $=$ квадрату kn .

366. ЗАДАЧА. Чрезъ данную точку p , лежащую между двухъ данныхъ линій ab и ac провести линію et , которая бы между данныхъ линій, опредѣлила треугольникъ aet равенъ данной фигурѣ Q .

Ф.
279.

Рѣшен. Данную фигуру Q преврати въ параллелограмъ ar повѣсомъ ph и углу cab (307. 287), сдѣлай $pi = pg$, попомъ между суммою линій $gp + pr$ и разностию $pr - gp = ir = rk$, сыщи среднюю пропорціональную rl (173), опредѣли $dm = rl$, изъ точки t чрезъ p проводи линію te , получишь желаемое.

Доказ.

Доказ. Ибо прямоугольникъ изъ суммы $gp + pr$, и разности $pr - gp = rk$, равенъ разности квадратовъ изъ тѣхъ же линѣй (365), то есть $gr \times rk = \overset{-2}{pr} - \overset{-2}{pg}$ равно $\overset{-2}{rl} = \overset{-2}{md}$ (172), къ симъ послѣднимъ количествамъ придай $\overset{-2}{pg}$, будетъ $\overset{-2}{pr} = \overset{-2}{md} + \overset{-2}{pg}$ (ариф. 33); треугольники жъ egp , prf и fdm между собою подобны; того ради $egp : gp = dfm : dm = pfr : pr$ (164), и припомъ $\overset{-2}{egp} + \overset{-2}{dfm} : \overset{-2}{gp} + \overset{-2}{dm} = \overset{-2}{dfm} : \overset{-2}{dm} = \overset{-2}{pfr} : \overset{-2}{pr}$; но $\overset{-2}{gp} + \overset{-2}{dm} = \overset{-2}{pr}$, по сему $\overset{-2}{egp} + \overset{-2}{dfm} = \overset{-2}{pfr}$, слѣдовательно $\overset{-2}{egp} + \overset{-2}{dfm} + \overset{-2}{agpfd} = \overset{-2}{pfr} + \overset{-2}{agpfd}$ (ариф. 33), то есть треугольникъ aem = параллелограму $agrd$ = фигурѣ Q .

Примѣч. Когда линѣя pr будетъ меньше pg , то данную фигуру должно превратить въ параллелограмъ по высотѣ pn , а остатокъ рѣшенія дѣлать попрежнему: если жъ и въ семъ случаѣ будетъ такоежъ препятствіе, то значить, что линѣю проведенною чрезъ точку d , треугольника равнаго данной фигурѣ опредѣлить не можно.

367. ЗАДАЧА Чрезъ точку p лежащую внутри данной фигуры $abcdefg$, проведи линѣю ik которая бы отрѣзала $\frac{1}{8}$ данной фигуры.

Рѣшен. Данную фигуру $abcdefg$ преврати въ треугольникъ men , опредѣли $ml = \frac{1}{8}$ 280.
мл

ип, проводи *el*, треугольникъ *mel* будетъ $= \frac{1}{3}$ фигуры *abcdefg*, продолжи *ab* и *ef* пока пересѣкутся въ *h*, потомъ по прошедшей задачѣ пропни *ik* такимъ образомъ, чпобъ треугольникъ *ikh* былъ равенъ фигурѣ *fgah* съ треугольникомъ *mel*, по лучишь желаемое.

Доказ. Поелику треугольникъ *ikh* = фигурѣ *fgah* съ треугольникомъ *mel* по рѣшенію, отъ коихъ опнявъ общую фигуру *fgah*, оспанется фигура *kfgai* = треугольнику *mel* $= \frac{1}{3}$ данной фигуры *abcdefg*.

Примѣч. Такимъ образомъ отъ всякой фигуры отрѣзывается желаемая часть, или опредѣляется линіею *ik* часть, равная данной другой какой нибудь фигурѣ.

368. ЗАДАЧА. Треугольникъ *abc*, изъ точки *h* раздѣлить по геометрическому маасъ-штабу на три равныя части.

Ф.
281.

Рѣшен. Смѣрай части основанія треугольника *ch* и *hb* и высоту *a'* по маасъ-штабу, сыщи площадь треугольника *abc* копорая пусть будетъ 2700° квадрашныхъ. Раздѣли оную площадь на три равныя части, частное число 900° будетъ $= \frac{1}{3} abc$, претью часть площади *abc* раздѣли на половину *bh* = 70°, частное число 25°. 5' взявъ съ маасъ-штаба положи по перпендикуляру отъ *b* до *f*, пропни *fe* въ параллель *bc*, изъ *h* въ *e*; будетъ треугольникъ *beh*

$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} abc$. Попомъ раздѣли претью часть 900° на половину $hc = 20^\circ$, частное число 90° взявъ съ маасъ-шпаба положи по перпендикулярѣ cd , изъ d просяни dg въ параллель bc , которая съ продолженною ca пересѣчется въ точкѣ g , изъ g просяни gk въ параллель ah , точки k и h соедини прямою линіею kh , получишь требуемое.

Доказ. Понеже $hb = 70^\circ$ и $bf = 25^\circ.5$ по рѣшенію: по площадь треугольника $bch =$ будепѣ $\frac{hb \times bf}{2} = 35^\circ \times (25^\circ.5') = 900^\circ = \frac{1}{3} abc$. Также плоскостѣ треугольника $hcg = \frac{cd \times ch}{2} = \frac{90^\circ \times 20^\circ}{2} = 900^\circ = \frac{1}{3} abc$; но треугольникѣ $ahg = ahk$ (129), и $(ach + ahg) cgh = (ahk + ach) achk = \frac{1}{3} abc$ слѣдовашельно и $khz = \frac{1}{3} abc$.

369 ЗАДАЧА. Каждой многоугольникѣ какъ здѣсь bde , раздѣлить по геометрическому маасъ-штабу на столько частей, на сколько желаешь. На примѣръ на три равныя части.

Рѣшен. и Доказ. Просяни въ многоугольникѣ діоголи ac , и ad , которыя раздѣляѣтъ многоугольникѣ въ треугольники abc , acd и ade , опусти изъ e , d и b на діогонали перпендикуляры en , do и bp , смѣрай оныя по геометрическому маасъ-штабу, также и діогонали ac и ad : попомъ сыщи

площадь

площадь треугольника aed , adc и abc (137);
 площади оныхъ треугольниковъ сложи
 вмѣстѣ получишь площадь фигуры bde .
 Раздѣли оную на сколько равныхъ частей
 на сколько дѣлишь желашь, то есть на
 три равныя части, частное число будетъ
 площадь каждой претѣй части много-
 угольника bde ; а понеже площадь треуголь-
 ника abc извѣстна: то положимъ что она
 будетъ меньше сысканнаго количества
 претѣй части, и такъ вычтя площадь
 треугольника abc изъ количества претѣй
 части многоугольника bde , остатокъ раз-
 дѣли на половину основанія ac , частное
 будетъ равно высотѣ ct , такого треуголь-
 ника которой въ число претѣй части къ
 треугольнику abc придасть должно. Протя-
 ни it въ параллель ac и изъ i въ a , бу-
 детъ фигура $abci = \frac{1}{3}bde$. Потомъ надле-
 житъ отдѣлить вторую часть $akhi$,
 что бы она и оставшая претѣя часть
 были четверосторонники; того ради вы-
 мѣрай ai по маасъ-шпабу, раздѣли поло-
 вину претѣй части, то есть шестую
 часть данной фигуры на половину ai , по-
 получишь перпендикуляру ig , протяни изъ g ,
 gh въ параллель ai и протяни ah , вымѣрай
 ah по маасъ-шпабу, раздѣли на половину
 ah оставшую половину претѣй части
 многоугольника, частное число будетъ
 равно перпендикуляру al , протяни изъ l , lk
 въ параллель ah , а изъ k въ h линію kh , бу-
 детъ фигура $akhi$ равна $\frac{1}{8}$ фигуры bde , также
 и часть $kedh = \frac{1}{8}$ фигуры bde .

Чи-

Числами.

$$ad=120', ac=100', en=30', do=58', bp=40'$$

$$\text{площ. } \triangle aed = \frac{ad \times en}{2} = \frac{120' \times 30'}{2} = 1800''$$

$$\text{площ. } \triangle adc = \frac{ac \times cd}{2} = \frac{100' \times 68'}{2} = 3400''$$

$$\text{площ. } \triangle acb = \frac{ac \times bp}{2} = \frac{100' \times 40'}{2} = 2000''$$

$$\text{площ. всего многоугольн. } abcde = 7200''$$

$$\frac{7200''}{3} = 2400'' = \frac{1}{3} abcde$$

$$\frac{1}{3} abcde - \triangle acb = 2400'' - 2000'' = 400'' = \triangle aic.$$

$$\frac{400''}{50} = 8' = \text{перпен. см.}$$

$$2000'' + 400'' = 2400'' = \triangle aic + \triangle acb = \frac{1}{3} abcde = a'bc.$$

$$\frac{2400''}{2} = 1200'' = \frac{1}{2} \text{ фигуры } abcde$$

$$ai = 80'. \quad \frac{80'}{2} = 40' = \frac{1}{2} ai.$$

$$\frac{1200''}{40} = 30' = \text{перпендик. } ig. \quad ah = 90'$$

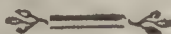
$$\frac{1200''}{45} = 26', 8'' = \text{перпенд. } al.$$

$$1200'' + 1200'' = 2400'' = \triangle aih + \triangle akh = \text{четвероугольн. } a'bc i = \text{трап. } akhi.$$

$$2400'' + 2400'' = 4800'' = \text{четвероугол. } abci + \text{трап. } akhi = \frac{2}{3} abcde.$$

$$7200'' - 4800'' = 2400'' = abcde - abch k = kedh.$$

Примѣч. Сія задача весьма подѣзна въ геодезіи при раздѣленіи полей на желаемое число частей.



О РАЗЛИЧНЫХЪ ПОЛОЖЕНІЯХЪ ПЛОСКОСТЕЙ.

№13. 370. Опред. Линія ac къ плоскости mn пер-

ф. пендикулярная называется та, которая со всѣми

283. линіями на плоскости mn чрезъ точку c проведенными дѣлаетъ углы acd , act , acg и $аси$ прямые.

ф. 371. Опредѣл. Плоскость pq перпенди-

284. кулярная къ плоскости mn есть та, которая пересѣкается съ другою такъ, что линіи ab , cd на плоскости pq проведенныя, будучи къ общему плоскостей разрѣзу pr и къ плоскости mn перпендикулярны.

372. ТЕОРЕМА. Іе. Линія acb , пересѣкается

ф. ся плоскостію mng только въ одной

283. точкѣ c . 2е. Когда двѣ точки c и d прямой линіи dc лежатъ на плоскости mg , то и вся линія dc лежитъ на тойже плоскости.

Ибо въ противномъ случаѣ, поверхность будетъ не прямая. 3е. Положеніе плоскости dst опредѣляютъ три точки d , c , t . Ибо явно что плоскость dst положенная на сѣи при точки, не-премѣнно на нихъ опереться должна. 4е. Если

ф. 284. плоскость pqr , пересѣчается плоскостію mn , то сѣченіе ихъ pr , будетъ прямая линія.

Ибо сѣченіе pr есть линія общая обѣимъ плоскостямъ, поелику на плоскостяхъ положенныя линіи суть прямые, чего ради и сѣя линія будетъ прямая.

ф. 285. 5е. Если двѣ параллельныя плоскости ml и nk разрѣжутся третіею плоскостію $abgf$: то сѣченіи ихъ ab и fg , будутъ линіи параллельныя между собою. Ибо ежели онѣ не параллельны, то сойшутся могутъ, по-
чему

О различныхъ положеніяхъ плоскостей 243

чему и плоскости на коихъ онѣ находятся также сойдутся, и потому не будутъ параллельны. ф. 283.
 бе. Изъ точки a которая енѣ плоскости, также изъ точки c находящейся въ плоскости болѣе одной перпендикулярной линіи ac къ плоскости dmi провестъ не можно. Ибо ежели положимъ что ag и pc будутъ перпендикулярны къ плоскости, то сему бытъ не можно, потому что ac и pd ко всѣмъ линіямъ на плоскости лежащимъ перпендикулярны, того ради корочѣ ag и pc , слѣдовательно линіи ag и pc не имѣютъ во всѣ стороны равнаго наклоненія, а потому и не перпендикулярны. 7е. Когда двѣ плоскости gm , pn перпендикулярныя къ тре- ф. 286.
 тій плоскости cd пересѣкутся между собою, то общее оныхъ сѣченіе линія ab , будетъ перпендикулярна къ плоскости cd . Ибо ежели изъ общей двумъ плоскостямъ gm и pn точки b провестъ перпендикуляръ ab къ плоскости cd , то оной будетъ находиться въ плоскости gm и pn ; а въ противномъ случаѣ плоскости не будутъ перпендикулярны къ плоскости cd , слѣдственно сей перпендикуляръ будетъ линія общаго разрѣза двухъ плоскостей.

373. ТЕОРЕМА. Наклоненіе двухъ плоскостей bm и bq , равно углу dhr опредѣленному двумя линіями dh и rh перпендикулярно къ общему плоскостей сѣченію ab на обѣихъ плоскостяхъ bm и bq проведенными.

Доказ. Ибо ежели вообразимъ себѣ, что плоскость bq положена на другую плоскость bm , и не отдѣляя одного своего конца ab отъ общаго плоскостей сѣченія, начнетъ другимъ отдвигаться: то точка d на линіи ad взятая находящаяся въ точкѣ p плоскости bm , будетъ описывать ф. 287.

дугу pd , которая есть мѣра угла pxd (13) или угла опредѣленнаго двумя плоскостями bm и bq .

Ф. 283. Слѣдств. Наклоненіе линіи pc къ плоскости acd , равно углу pcd , опредѣленному линіею pc , и линіею cd изъ точки c по плоскости acd проведенною къ концу d перпендикуляра pd , изъ точки p на плоскость acd опущеннаго.

Ф. 283. 374. ТЕОРЕМА. Разстояніе точки p отъ плоскости gmd , измѣряется перпендикуляромъ pd изъ той же точки на плоскость опущеннымъ. Ибо pd короче нежели cp , потому что pd есть перпендикуляръ на линіе cd ; слѣдственно кратчайшее разстояніе точки p отъ плоскости есть линія pd .

Ф. 286. 375. ТЕОРЕМА. Если нѣсколько плоскостей пересѣкутся въ одной линіи ab , то сумма угловъ взаимнаго ихъ наклоненія около линіи ab , равна 360 грд. 2^о. Когда нѣсколько параллельныхъ плоскостей

Ф. 285. пересѣкутся одною плоскостію, то углы въ одну сторону лежащіе, и на крестѣ между параллельныхъ плоскостей будутъ равны между собою; также сумма двухъ угловъ находящихся внутри двухъ параллельныхъ плоскостей, равна двумъ прямымъ угламъ.

Ф. 286. Если двѣ плоскости взаимно пересѣкутся; то сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ; также когда двѣ или нѣсколько плоскостей пересѣкутся тре-

Ф. 285. тіею плоскостію такъ, что углы на крестѣ или въ одну сторону лежащіе будутъ равны; то оныя плоскости будутъ между собою параллельны и проч. Ибо о мѣрѣ угловъ отъ наклоненія плоскостей происходя-

щихъ, разсуждается какъ о плоскихъ углахъ линіями опредѣляемыхъ, о чѣмъ предъ симъ уже говорено.

376. ТЕОРЕМА. Двѣ прямыя линіи dc и gc пересѣкающіяся въ точкѣ c , находятъся въ одной плоскости.

Ибо 1е. Плоскость gcd есть поверхность которой всѣ точки находящаяся въ прямомъ положеніи (§ 4).
2е. Положеніе плоскости gcd опредѣляющъ три точки c , d и g ; слѣдовательно оныя линіи лѣжатъ въ одной плоскости. ф. 283.

377. ТЕОРЕМА. Двѣ прямыя линіи ac и pd перпендикулярныя къ плоскости gcd , параллельны между собою.

Ибо соединя точки c и d пресѣченія линій ac и pd съ плоскостію gcd , будутъ линіи ac и pd перпендикулярны къ линіи cd (370), посему оныя параллельны между собою (49).

378. ТЕОРЕМА. Если къ одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей линія bg перпендикулярна, то оная будетъ перпендикулярна и къ другой плоскости.

Положимъ что будетъ перпендикулярна къ плоскости nk : то оная будетъ перпендикулярна къ линіи gf на тойже плоскости проведенной (370); но плоскость ml параллельна къ плоскости nk , чего ради линія ab параллельна gf , уголъ $fgb + abg = 180^\circ$ (48); но уголъ $fgb = 90^\circ$, посему уголъ $abg = 90^\circ$, слѣдовательно линія g' , перпендикулярна къ линіи ba и къ плоскости ml (370). ф. 285.

О ТѢЛАХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ.

379. Опредѣл. Корпусомъ или тѣломъ называется всякое пространство имѣющее

при измѣреніи, въ длину, ширину и высоту. Наружности тѣла суть плоскости окружающія оное.

ф. 380. **Опредѣл.** Призма есть тѣло, 288
и 289 происходящее отъ движенія какой нибудь плоскости самой себѣ параллельно по линіе dh , стоящей на тойже плоскости. Движущаяся плоскость, на примѣръ пятиугольникъ $ocdgh$ или hke , называется основаніе призмы.

Слѣдств. Изъ того яствуетъ, что бока основанія призмы cd , co , of , и проч. во время своего движенія опишутъ параллелограммы ch , ol , oe , fk и проч. коихъ сумма вообще, будетъ ограничивать поверхность споронъ призмы.

Примѣч. I. Призмы названіе свое получаютъ отъ числа боковъ своего основанія. На прим. когда основаніе призмы будетъ треугольникъ, четверосторонникъ, пятиугольникъ и проч. то и призма называется трехсторонная, четверосторонная пятиугольная и проч.

ф. **Примѣч. II.** Ежели основаніе призмы 290. будетъ прямоугольникъ cd , такая призма называется параллелолипедъ.

ф. **Примѣч. III.** Когда движущаяся плоскость 291 будетъ кругъ, то такое тѣло 292. именуется цилиндръ.

381. **Опредѣл.** Линія ab , проведенная изъ центра нижняго основанія правильнаго много-

многоугольника или круга, въ центрѣ верхняго, называется ось призмы или цилиндра. фиг. 288. 289. 290. 291 и 292.

Примѣч. I. Ежели ось ab , будетъ перпендикулярна къ плоскости верхняго или нижняго основанія; тогда призмы и цилиндры называются *прямыми*. Если же ab будетъ не перпендикулярна къ плоскости основанія, въ такомъ случаѣ оныя называются *наклоненными* или *косыми*. ф.288 290 291. ф.289 и 292

Примѣч. II. Прямой цилиндръ происходитъ также отъ обращенія прямоугольника ab около одного своего бока ab , которой будетъ ось цилиндра. Ибо параллельныя линіи ad и bh , опишутъ круги, а линія dh поверхность снаго. ф.291

382. Опрѣдѣл. Высота призмы или цилиндра есть линія ab и ef перпендикулярная къ обѣимъ параллельнымъ плоскостямъ he и df ; на которыхъ основанія находящяся. фиг. 288, 289, 290, 291, 292.

383. Опрѣдѣл. Пирамида есть тѣло произходящее отъ движенія какой нибудь плоскости въ верхѣ самой себѣ параллельно, по прямой линіе gv стоящей на той же плоскости, уменьшая свои бока въ арифметической прогрессіи до тѣхъ поръ, пока послѣдняя плоскость равна будетъ точкѣ v или нулю. Плоскость $abcde$ называется *основаніе пирамиды*. Точка v верхѣ пирамиды именуется. ф. 293 294.

Слѣдств. Понеже основаніе пирамиды можетъ быть треугольникъ, четвероуго-

ронникъ пятиугольникъ и проч. того ради пирамида называется *трехсторонная*, *четверосторонная* и проч.

Примѣч. Ежели движущаяся плоскость *ab* будетъ кругъ, то такое тѣло именуется конусъ. *фиг. 295. и 296.*

384. Определ. Линія *vg* проведенная изъ верьха *v*, въ центръ *g* правильного много-
 ф293 угольника или круга, называется ось лира-
 и296 миды или конуса. Линія *av* наклоненной бока. Ежели ось *vg* перпендикулярна къ плоскост-
 ф. и основанія, то пирамиды или конусы на-
 294 зываются прямыми, а въ противномъ слу-
 и296 чаѣ именуются наклонными или косы-
 ми.

Примѣч. Прямой конусъ произойдетъ также и
 ф295 отъ обращенія прямоугольнаго треугольника *avg*, около одного своего бока *vg*, за ось конуса взятаго; ибо линія *ag* опишетъ кругъ, а діагональ *av* повер-
 жность конуса.

385. Определ. Высота пирамиды или конуса есть линія *vg* или *vh*, перпендикулярно опущенная изъ верьха пирамиды на плоскость, въ которой основаніе находится. *фиг. 293. 294. 295 и 296.*

386. Определ. Отрѣзная или сокращен-
 ф. ная пирамида есть тѣло происходящее
 297. отъ движенія какой нибудь плоскости на прим. *abcd* самой себѣ параллельно по прямой линіе *ki* стоящей на тойже плоскост-
 ии

пи уменьшая свои бока въ арифметической прогрессии такъ, что послѣдняя плоскость *ehgf* не дойдя до почки расположившаяся. Параллельныя плоскости *abcd* и *efgh* называются основаніями пирамиды.

Примѣч. I. Когда движимая плоскость будетъ кругъ *ab*, то произшедшее отъ такого движенія тѣло называется отрубъ-ной конусъ ф. 298

Примѣч. II. Отрубъной конусъ также произойдетъ и отъ обращенія прямоугольной трапеціи *aikc* около своего перпендикулярнаго бока *ik*, которой будетъ осью конуса; ибо двѣ не равныя параллельныя линіи *ai* и *ck* опишутъ круги, а линія *ac* поворачность онаго.

387. Опредѣл. Шаръ или сфера есть ф. тѣло производящее отъ обращенія полу-299. круга *adb* около своего діаметра *ab*. Діаметръ *ab* называется ось, а концы онаго, то есть точки *a* и *b* полюсами шара именуются.

Слѣдств. По сему шаръ есть тѣло определенное такою выпуклою поверхностью, которой всѣ точки отъ внутренней точки *c* (имянуемой центромъ шара) въ равномъ разстояніи находятся.

388. Опредѣл. Вырѣзокъ или секторъ ф. шара *ezfa*, есть тѣло происходящее отъ 300. обращенія вырѣзка круга *zaf* около одного своего бока *az* за ось взятаго.

ф. 301

389. *Опредѣл.* Отрѣзокъ или сегментъ шара *fsen* есть шѣло, которое происходитъ отъ обращенія полуотрѣзка круга *ase* около своего перпендикуляра *as* стоящаго на срединѣ хорды *ef*.

ф. 302

390. *Опредѣл.* Частъ поверхности шара находящаяся между двухъ параллельныхъ круговъ *ab* и *cd* называется (зоною) лоясь.

Примѣч. Изъ вышеписанныхъ предложеній видно, что шѣла производящѣ по большей части двоякимъ образомъ, то есть или отъ обращенія плоскости около одного своего бока за ось взяшаго, или отъ движенія тойже плоскости по прямой линѣ; изъ чего явствуетъ ие. Что при обращеніи плоскости всякая перпендикулярная линѣ изъ каждой точки оси въ плоскости проведенная, опишетъ кругъ; коихъ число будетъ равно числу точекъ неподвижной бока или ось составляющихъ, или числу линій опредѣляющихъ поверхность вращающейся плоскости. 2е. Движимая плоскость подымаясь по прямой линѣ, оставитъ столько касающихся между собою слѣдовъ или плоскостей, сколько есть точекъ въ линѣ по которой плоскость движеніе имѣть будетъ; по сему число сихъ плоскостей въ первомъ и послѣднемъ случаѣ есть одно; слѣдовательно всякое шѣло считать можно составленнымъ изъ безконечнаго числа плоскостей или безмѣрно тонкихъ слоевъ.

391. *Опредѣл.* Ежели какое нибудь шѣло на прим. *de* и *avb* разрѣжется плоскостію параллельною основанію, то фигура *mn* и *k'* на поверхности шѣла изображенная, называется сѣченіемъ или раз-

разрѣзомъ. Кои въ прямыхъ призмахъ будутъ равны, а въ пирамидахъ подобны основаніямъ. Сѣченіи жъ цилиндровъ, конусовъ и прочихъ тѣлъ происходящихъ отъ обращенія, будутъ круги. Смотри фигуры отъ 288 до 298.

392. *Опредѣл.* Корпусной уголъ или Ф.
303. уголъ тѣла называется пошъ, которой составляется изъ нѣсколькихъ плоскихъ угловъ acb , acd и bcd лежащихъ на разныхъ поверхностяхъ, коихъ верьхи сообщаются въ одной почкѣ c) почку c должно разумѣть возвышенную надъ плоскостію abd).

Примѣч. Изъ сего явствуетъ, что два плоскіе угла cab и bad , корпуснаго угла составить не могутъ; попому что одинъ надругаго упастъ должны; и что для составленія корпуснаго угла потребно не меньше трехъ плоскихъ угловъ, изъ коихъ сумма двухъ какихъ нибудь угловъ больше претьяго быть должна: ибо два угла acb и acd вмѣстѣ взятые, должны составить угловатую поверхность $dcbad$, слѣдственно оные имѣютъ быть больше претьяго dab .

Слѣдст. Изъ того жъ видно, что корпусной уголъ измѣряется суммою градусовъ плоскихъ угловъ составляющихъ оной уголъ.

393. ТЕОРЕМА. Сумма всѣхъ плоскихъ угловъ составляющихъ уголъ тѣла, должна быть меньше 360° .

ф. 293. Доказ. Поскольку углы agb , bgs и проч. лежащіе на плоскости $abcde$ около точки g вообще составляютъ 360° ; и такъ ежели вообразимъ себѣ, что точка g будетъ возвышаться до точки v вмѣстѣ съ линіями ag , bg , gs и проч. кои выпягиваясь сдѣлаются линіями av , bv , cv и проч. бока жѣ ab , bc , cd и проч. основанія $abcde$ останутся неизмѣненны: то углы avb , bvc , и проч. опредѣляющіе корпусной уголъ v будутъ меньше угловъ agb , bgs и проч. посему меньше 360° , слѣдовательно корпусной уголъ не можетъ быть изъ 360 градусовъ.

394. ТЕОРЕМА. Всякое тѣло ограниченное плоскостями, меньше четырехъ плоскихъ сторонъ имѣть не можетъ.

ф. 303. Доказ. Ибо для составленія каждаго угла тѣла, требуется не меньше какъ при плоскихъ углахъ acd , acb и bcd ; но уголъ тѣла c такъ составленный, оставляетъ въ нутри себя полость, посему для закрытія оной пустошы, по крайнѣй мѣрѣ еще одна плоскость abd потребна; слѣдовательно для составленія всякаго тѣла не меньше четырехъ плоскостей потребно.

395.

395. *Опредѣл.* Правильное тѣло есть то, которое окружается равными и правильными плоскостями и имѣетъ корпусные углы равны: въ противномъ же случаѣ называется *неправильнымъ*.

396. *Опредѣл.* Правильныхъ тѣлъ ф. 303
сущъ пять. *1е.* Тетраедръ есть трехъ споронная пирамида опредѣленная четырьмя равными равноспоронными треугольниками, какъ *abd.* *2е* Кубъ *abde* 304
есть правильное тѣло, окружающее шестью равными квадратами. *3е* Октаедръ *abcd* 205
(удвоенная чепвероспоронная пирамида) есть тѣло опредѣленное 8ю равными равноспоронными треугольниками. *4е* Додекаедръ *ag* 306
есть тѣло, окруженное 12ю равными правильными пятиугольниками. И напоследокъ *5е* Икосаедръ *bcfec* 307.
есть правильное тѣло, опредѣленное 20ю равными равноспоронными треугольниками.

Слѣдст. I. Поскольку всѣ спороны каждого изъ правильныхъ тѣлъ опредѣляются равными и правильными фигурами, посему всякое изъ нихъ впишется въ шаръ такимъ образомъ, что всѣ ихъ углы коснутся поверхности шара, и центръ каждого соединится съ центромъ шара.

О НАЧЕРТАНІИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТѢЛЪ,
И О СОСТАВЛЕНІИ ОНЫХЪ ИЗЪ
БУМАГИ.

397. ЗАДАЧА. По данной высотѣ ab и боку основанія bc , начертить поверхность пяти сторонной призмы.

ф. Рѣшен. проведя линію ae равну суммѣ бо-
308. основанія призмы, изъ точекъ a и e поправъ перпендикуляры ab и ed равны данной высотѣ ab , пропяти bd , раздѣли ae на пять равныхъ частей въ h, i, k и l , пропяти hc, im, kn , и lo въ параллель ab , сдѣлай на ik и mt правильные пятиугольники kf и mg , получишь желаемое.

Примѣч. Такимъ образомъ начертится поверхность всякой призмы, когда на произвольно проведенной линіи ae положится данной бокъ основанія столько разъ, сколько призмы боковъ въ основаніи имѣть должна, и высота опредѣлился равна высотѣ призмы.

398. ЗАДАЧА. По данной высотѣ ab , длинѣ cd и широтѣ ef основанія параллелолипеда, начертить поверхность онаго.

ф. Рѣшен. На произвольно проведенной ли-
309. ніи gh , опредѣли $gs = cd$, $sf = ef$, $fo = gs$, $oh = sf$, изъ точекъ g и h поставъ перпендикуляры gi и hm равны данной высотѣ ab , проведи линіи sk, fl и om въ параллель

лель gi , сдѣлай на fo и lm прямоуголь-
ники lr и fq коихъ бы высоты были $= ef$
получишь желаемое.

399. ЗАДАЧА. По данной высотѣ gh ,
и діаметру ik основанія прямаго ци-
линдра, начертить поверхность
онаго.

Рѣшен. Раздѣли діаметръ ik на 12 No 4
равныхъ частей, проводи линію $ab=355$ Ф.
такимъ же частямъ, изъ точекъ a и b 310.
поставь перпендикуляры ac и $bd=$ дан-
ной высотѣ gh , пропни cd ; на про-
долженной ac и bd сдѣлай cf и $be=$ діа-
метру ik , наконецъ раздѣля оныя по-
поламъ опиши круги, получишь желае-
мое.

Доказ. Понеже cb равна окружности
круга діаметра ik , по сему согнувъ пара-
лелограмъ ad , что бы бокъ ac соединился
съ бокомъ bd , линія ab сдѣлается окруж-
ностію основанія цилиндра; слѣдственно
паралелограмъ ad составитъ наружную
поверхность цилиндра.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что по-
верхность цилиндра равна паралелограму,
коего высота $=$ высотѣ, а основаніе равно
окружности основанія цилиндра.

400. ЗАДАЧА. По данному наклонен-
ному боку ab , и боку cd основанія
прямой

прямой трехсторонной пирамиды,
начертить поверхность оной.

Ф. Рѣшен. Изъ произвольно взятой на бумагѣ почки e , радиусомъ ef равнымъ данному боку ab опиши неопредѣленную дугу fk , положи по оной бокъ основанія cd три раза въ g , h и k , пропями fg , gh и hk ; на конецъ сдѣлай на gh равносторонной треугольникъ ghi , получишь желаемое.

Примѣч. Такимъ образомъ поверхность всякой пирамиды черпипъ надлежитъ; наблюдая только то, что бы по дугѣ, данной бокъ основанія полагать столько разъ, сколько пирамида въ основаніи боковъ имѣетъ.

401. ЗАДАЧА. По данному наклоненному боку ab и діаметру круга ad , начертить поверхность прямого конуса:

Ф. Рѣшен. Изъ почки b , раствореніемъ 312. косого бока ba опиши неопредѣленную дугу ac , раздѣли діаметръ ad на 113 или на 7 равныхъ частей, попомъ по дугѣ ac положи таковыхъ 355 или 22 части, проведи bc ; на продолженной ba сдѣлавъ $ad =$ діаметру ad опиши кругъ, получишь требуемую поверхность конуса.

Доказ. Понеже дуга $ac =$ окружности круга ced (255), посему согнувъ вырѣзокъ abc такъ, чтобы бокъ bc соединился съ

съ бокомъ ab , при чѣмъ дуга ac не премѣнно обойдетъ окружность круга aed , слѣдственно составитъ наружную поверхность конуса.

402. ЗАДАЧА. По данному боку ab , и діаметру ik и od верхняго и нижняго круга, начертить поверхность прямаго отрѣзнаго конуса.

Рѣшен. По тремъ линіямъ od , ik и ab , Ф.
313. начерпи трапецію hf такъ, что бы оной основаніе hz равно было od , $cf = ik$ и $ab = ef = hc$ (74), продолжи ef и hc до p изъ точки p радіусомъ pe опиши не опредѣленную дугу em , діаметръ od раздѣли на 113 или 7 равныхъ частей, каковыхъ положи по дугѣ em 355 или 22 части, проводи pm ; потомъ изъ p радіусомъ pf опиши дугу fcl , продолжи hm , сдѣлай $mg = od$ и $ln = ik$, раздѣля оныя пополамъ опиши круги mdg и lnr ; фигура $ehmclg$ будетъ поверхность отрѣзнаго конуса.

Доказ. Изъ точки p на основаніе eh трапеціи es опусти перпендикуляръ ps . Теперь вообрази себѣ что прямоугольной треугольникъ hps вообще съ трапеціею $ctsh$ сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около перпендикулярнаго своего бока pts , отъ чего произойдутъ прямой ehp и отрѣзной конусъ $ehcf$, и для подобія треугольниковъ pfc и pen будетъ $pf : pe = fc : en$ (104)

Часть II Р = fcl

$= fcl : eht$ (248. слѣд.); но $fc : eh = fcz : exhz$ (248), посему $fil : eht = fcz : exhz$ (ариф. 229); но $eht = exhz$ по положенію, слѣдственно $fcl =$ окружности fcz (ариф. 248), и такъ согнувъ поверхность $felm/c$, что бы бокъ lm соединился съ бокомъ ef , сдѣлается дуга fcl окружностію круга nrl или fcz , а дуга eht окружностію круга mqg или $exhz$, слѣдовательно составивъ поверхность отрѣзнаго конуса.

403. ЗАДАЧА. По данному наклонному боку mn , бокамъ op и qr верхняго и нижняго основанія, начертить поверхность трехсторонной прямо отрѣзной пирамиды.

Ф. 314. Рѣшен. Изъ трехъ линій mn , op и qr начерти трапецію $acdb$ (74), продолжи бока ac и bd до e , изъ точки e радіусомъ ea опиши произвольной величины дугу abh , а радіусомъ ec дугу $cdik$, положи по дугѣ la бокъ ab въ почкахъ h и l , по дугѣ ck бокъ cd въ почкахъ i и k два раза; пропни bh , hl и di , ki наконецъ сдѣлай на bh и df равноспоронные треугольники gbh и idf получишь желаемое.

Примѣч. Такимъ же образомъ поверхность всякой отрѣзной пирамиды черпимъ надлежипъ наблюдая только то, чпобъ по дугѣ ck и al данной бокъ верхняго и

и нижняго основанія полагають столько разъ, сколько пирамида въ основаніи боковъ имѣетъ.

404. ЗАДАЧА. По данному боку ab начертить поверхность тетраэдра.

Рѣшен. На продолженной ab сдѣлай ac ф. 316
 $= ab$, на bc начерти равноспоронной треугольникъ cbe , просяни ad въ параллель ce , df въ параллель bc , проводи af , получишь желаемое.

405. ЗАДАЧА. По данному боку ab начертить поверхность куба.

Рѣшен. Продолжи ab до p , что бы bp равна была тремъ ab , изъ a, b, c, d и p ф. 316
 поставь перпендикуляры, каждой равенъ ab , просяни fg , сдѣлай на cd и hi квадраты cn и ki , получишь требуемое.

406. ЗАДАЧА. По данному боку bc начертить поверхность октаэдра.

Рѣшен. Продолжи bc въ обѣ стороны, ф. 317
 сдѣлай ab и cf равну bc , начерши на ac и bf равноспоронные треугольники acg и bfi , продолжи gc до d , hb до i , просяни be въ параллель ag , di въ параллель af , проводи ie и ci , получишь желаемое.

407. ЗАДАЧА. По данному боку ab начертить поверхность додекаэдра.

Р а

Рѣшен.

Рѣшен. На бока cb начерти правильной пятиугольникъ abd (214), продолжи діагонали онаго ad , ac , ec , eb , и db , сдѣлай ex , az , df , at , cq , eu , br , ev , bl и dk каждую $= ab$, распвореніемъ оной изъ k , u , t , r и x опиши дуги y , а изъ v , z , l , q и f тѣмъ же распвореніемъ пересѣки дуги y , пропни линіи ki , iv , uy , yz , ty , yl , ry , uq , xy , uf , будешь половина поверхности додекаедра. Потомъ продолжи ei до p и ek до g каждую $= ab$, распвореніемъ оной сдѣлай изъ p и g равнобедренной треугольникъ pnk оный чего произойдетъ правильной пятиугольникъ pnk , на линіе pn начерти правильной пятиугольникъ pnh , около сего пятиугольника начерти какъ и прежде другую половину, получишь желаемое.

408. ЗАДАЧА. По данному боку ab начертить поверхность икосаедра.

Рѣшен. Сдѣлай на ab равноссторонной треугольникъ abc , продолжи основаніе ab до d , что бы bd равна была чешыремъ ab , сдѣлай на оныхъ равноссторонные треугольники x , пропни чрезъ верьхи ихъ линію $cf = ad$, точки d и f соедини прямою линіею df , сдѣлай на cf пять равноссторонныхъ треугольниковъ, получишь желаемое.

409. ЗАДАЧА. Поданному діаметру cd начертить поверхность шара.

Рѣшен.

Рѣшен. Проведи линію ab равную окружности круга діаметра cd , раздѣли ab на 24 равныя части, поставь изъ середины каждой перпендикуляры ee , ff , gg и такъ далѣе, что бы каждой былъ $= \frac{1}{4}$ окружности, сыщи центръ такого круга, котораго бы окружность проходила чрезъ точки e, b и e или e, i и e (81), сысканнымъ радіусомъ уступая почаси описывай дуги ebe , fif и такъ далѣе опиши всѣ 24 съ обѣихъ сторонъ дуги, получишь пребуемую поверхность шара.

410. ТЕОРЕМА. Правильныхъ тѣлъ болѣе пяти быть не можетъ.

Доказ. Понеже сумма плоскихъ угловъ опредѣляющихъ корпусной уголъ должна быть меньше 360° (393): того ради при угла равностороннаго треугольника изъ коихъ каждой по 60° составляютъ корпусной уголъ тетраэдра во 180° . Четыре плоскихъ угла кои по 60° составляютъ корпусной уголъ октаэдра въ 240° . Пять плоскихъ угловъ каждой по 60° составляютъ корпусной уголъ икосаэдра въ 300° , меньше нежели 360° : но 6 угловъ по $60^\circ = 360^\circ$, то есть шесть угловъ равностороннихъ треугольниковъ корпуснаго угла составить не могутъ; и такъ правильныхъ тѣлъ которыя опредѣляются равносторонними треугольниками болѣе трехъ быть не можетъ. Три квадратныя угла изъ коихъ каждой по 90° опредѣляютъ уголъ куба въ 270° ; но 4 квадр-

Ф. 322. ные угла корпуснаго угла опредѣлить не могутъ. И наконецъ при угла правильныхъ пятиугольниковъ изъ коихъ каждой $\equiv 108^\circ$ составляютъ корпусной уголъ додекаедра въ 324° ; а въ 4 такихъ углахъ будетъ больше нежели 360° , посему другаго правильного тѣла изъ пятиугольниковъ кромѣ додекаедра составить не можно. Изъ другихъ же угловъ правильныхъ многольниковъ какъ то шести, семиугольниковъ и проч. уголъ правильного тѣла не составится. Ибо для составленія корпуснаго угла по крайній мѣрѣ при плоскихъ угла потребно, коихъ сумма должна быть меньше 360° ; но 3 угла шести и семиугольника и проч. не могутъ составить корпуснаго угла менѣе 360° , слѣдовательно и правильныхъ тѣлъ болѣе пяти быть не можетъ.

Ф323

О ИЗМѢРЕНІИ И СРАВНЕНІИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТѢЛЪ.

411. *Опредѣл.* Поверхность тѣла называется только площадь его споронъ, выключая основанія буде имѣются: а цѣлою поверхностью именуется поверхность тѣла во обще съ основаніями.

412. ТЕОРЕМА. Поверхность прямой призмы *каде* равна произведенію, изъ ея высоты *dh* на сумму боковъ основанія.

Нотз Доказ. Ибо поверхность призмы
Ф.288 окружается шогикимъ числомъ паралелограмовъ

грамовъ сколько боковъ въ основаніи находится (380); но площадь каждаго изъ сихъ паралелограма какъ dc/h равна произведенію высоты призмы hd чрезъ бокъ основанія cd или co умноженной; погю ради поверхность призмы равна произведенію ея высоты dh , чрезъ число перпендикуляровъ dc составляющихъ окружность основанія $cdgfo$ призмы dfk .

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что поверхность прямого параллелоипеда равна ф.
 произведенію высоты dh на окружность 290.
 основанія. Ибо поверхность параллелоипеда выключая основанія, равна параллелограму коего высота gi равна высотѣ dh , ф.
 а основаніе gh равно окружности основанія dc параллелоипеда (398). 309.

413. ТЕОРЕМ. Поверхность прямого цилиндра, $dhef$ равна произведенію изъ его высоты dh на окружность круга діаметра fd .

Доказ. Ибо поверхность цилиндра равно паралелограму коего основаніе $ab =$ ф.
 окружности круга df , а высота $bd =$ 291
 высотѣ цилиндра dh (399), слѣдовательно 310.
 поверхность онаго равна произведенію изъ высоты dh на окружность основанія цилиндра.

414. ТЕОРЕМА. Поверхность пирамиды edv равна произведенію суммы
 Р 4 боковъ

боковъ составляющихъ окружность основанія *abcde* половиною высоты треугольника *vr* умноженной.

Ф. 293. Доказ. Понеже основаніе прямой пирамиды есть правильной многоугольникъ, и треугольники окружающіе поверхность пирамиды равны между собою, изъ коихъ площадь каждого на прим. *abv* равна, произведенію половинѣ высоты *vr* умноженной бокомъ основанія *ab*, то есть $= ab \times \frac{1}{2} vr$; по сей причинѣ и сумма всѣхъ треугольниковъ составляющихъ поверхность пирамиды $= 5ab \times \frac{1}{2} vr$, то есть поверхность пирамиды равна произведенію изъ суммы боковъ основанія и половины высоты *vr*.

415. ТЕОРЕМА. поверхность прямаго конуса, равна треугольнику коего основаніе равно окружности круга основанія конуса, а высота равна наклоненному боку *av*.

Ф. 295 312. Доказ. Понеже поверхность конуса *abv* равна сектору *abc*, коего дуга *ac* равна окружности круга діаметра *ab*, а радіусъ *cb* равенъ наклоненному боку *av* конуса *avb* (401); но вырѣзокъ *abc* равенъ треугольнику коего основаніе равно дугѣ *ac*, а высота равна радіусу *cb* (255) или наклоненному боку *av*, слѣдовательно поверхность конуса равна треугольнику коего основа-

основаніе равно окружности основанія ,
а высота наклоненному боку av конуса.

416. ТЕОРЕМА. Поверхность прямой
отрѣзной пирамиды, равна произведе-
нію изъ полсуммы боковъ большаго $abcd$
и меньшаго $efgh$ основанія пирамиды
 eg , на высоту hp трапеціи $dhgc$.

Доказ. Понеже площадь трапеціи $dhgc$ ф.
опредѣляющей сторону пирамиды равна 297.
 $hp \times \frac{1}{2} (hg + dc) (159)$, слѣдственно по-
верхность всей пирамиды будетъ $= hp$
 $\times \frac{1}{2} (dc + hg) \times 4 = hp \times \frac{1}{2} (4dc + 4hg)$,
то есть полсуммы боковъ верхняго и
нижняго основанія умноженная высотой
 hp , равна поверхности пирамиды выклю-
чая основаніи.

417. ТЕОРЕМА. Поверхность пряма-
го отрѣзнаго конуса $abdc$, равна тра-
пеціи $mnop$, которой основаніе mn
равно окружности большаго круга ab ,
параллельная op равна окружности
меньшаго круга cd , а высота mq рав-
на наклоненному боку ac .

Доказ. Проведи линію mn равну окруж- ф.
ности круга діаметра ab , поставь пер- 298
пендикуляръ ms боку ah конуса abh , 324.
проведи линію ns , опредѣли sq боку
 ch , просяни qo параллельно mn ; будетъ

qo = окружности круга діаметра cd и трапеція $то$ равна поверхности опрѣзнаго конуса $abdc$. Ибо (положа что окружность круга діаметра $ab = y$, а окружность круга діаметра $cd = r$) для подобія по сочиненію треугольниковъ tns , qos и треугольниковъ abh и hcd , будетъ $ah : hc = ab : cd$, также $(sm) ah : (cq) hc = tn : qo$ (104), посему $tn : qo = ab : cd = y : r$ (ариф. 227. 229) : но $tn = y$ поположенію, посему и $oq = r =$ окружности круга діаметра cd , слѣдственно и треугольникъ $qos =$ поверхности конуса cdh ; а треугольникъ $tns =$ поверхности конуса abh по сочиненію, слѣдовательно треугольникъ tns безъ треугольника qos , то есть площадь трапеціи $то =$ поверхности опрѣзнаго конуса.

418. ЗАДАЧА. Поданному боку $co = 80'$ основанія cdf и высотѣ $dh = 150'$, пятисторонной призмы de ; сыскать поверхность оной.

Рѣшен. Данной бокъ co призмы de
 Ф. 288 умножь числомъ боковъ, произведеніе будетъ равно окружности основанія $cdgfo$, которую умножа высотой dh , произведеніе будетъ равно поверхности призмы безъ основаній, то есть

$80' \times 5 = 400' =$ окружности. основанія $cdgfo$
 $400' \times 150' = 60000''$ квадрап. = поверхность призмы.

справе-

справедливость сего показываетъ § 412.

Прибавл. I. Если ли потребуется цѣлая поверхность призмы, то сыщи площадь основанія призмы, удвой оную придай къ поверхности призмы получишь желаемое.

419. ЗАДАЧА. По высотѣ $dh = 40^\circ$ и діаметру основанія $df = 20^\circ$ цилиндра ed , сыскать поверхность онаго.

Рѣшен. Сыщи по діаметру df окружность основанія цилиндра, умножь оную ф291 высотой dh , получишь поверхность цилиндра.

Числами.

$$7 : 22 = 20^\circ : 62^\circ, 85'' = \text{окруж. основ.}$$

$$\begin{array}{r} 62^\circ + 85'' \\ \times 40 \\ \hline \end{array}$$

$$2514^\circ, 00'' = \text{поверхности цилиндра } ed.$$

420. ЗАДАЧА. Известна цѣлая поверхность цилиндра ad и высота ac , сыскать онаго діаметръ основанія ab .

Рѣшен. и Доказ. Положимъ что ef №14
будетъ равна окружности круга діаметра ab , высота $ac = eh$: то параллелограмъ ef ф. 325.
 eg съ параллелограмомъ hi (которой равенъ площади двухъ круговъ ho и fp основанія цилиндра § 255), то есть параллелограмъ ei будетъ равенъ цѣлой поверхности цилиндра.

цилиндра. И такѢ когда діаметръ oh раздѣлится на 14 равныхъ частей, то въ окружности круга $ki = hg$ будетѢ 44, а въ радіусѢ km 7 такихъ же частей, чего ради сдѣлай слѣдующую пропорцію: $44 : 7 = ekif : ektn$, то есть площадь параллелограма ei къ площади параллелограма lm (139), и напоследокъ по известной площади параллелограма em и разности боковѢ eh , сыщется радіусѢ $kh = km$ (179), и $kh \times 2 =$ діаметру $ho = ab$.

421. ЗАДАЧА. По данному наклоненному боку $av = 50^\circ$ и боку $ab = 60^\circ$ основанія $abcd$ прямой пирамиды $ев$, сыскать поверхность оной.

Рѣшен. Сыщи высоту vr треугольника bcv (154), потомъ умножь величину ф. бока ab чрезъ число боковѢ основанія пирамиды, получишь окружность основанія пирамиды; которую умножь половиною высоты vr , будетѢ требуемая поверхность, то есть

$$\begin{aligned} \frac{60^\circ}{2} &= 30^\circ = \frac{ab}{2} = br \\ 50^\circ \times 50^\circ &= 2500^\circ = av. \quad 30^\circ \times 30^\circ = 900^\circ = ar \\ 2500^\circ &= av \\ 900^\circ &= ar \\ \hline 1600^\circ &= av - ar = vr. \quad \sqrt{1600^\circ} = 40^\circ = vr. \end{aligned}$$

$60^\circ \times 5 = 300^\circ =$ окружности $abcde$ основан.

40°
 $300^\circ \times \frac{40^\circ}{2} = 6000^\circ$ квад. поверх. пирамид.

422. ЗАДАЧА. По данному наклоненному боку $av = 100'$ и діаметру основанія $ab = 70'$ прямаго конуса avb , сыскать цѣлую поверхность онаго.

По діаметру ab сыщи окружность основанія конуса avb (256), умножь оную половиною наклоненнаго бока av , произведеніе будетъ равно поверхности конуса безъ основанія; наконецъ сыскавъ площадь круга діаметра ab , придай къ поверхности конуса получишь пребуемую поверхность.

Ф.
295.

числами.

$$100' = av. \quad 70' = ab.$$

$$7 : 22 = 70' : 220' = \text{окруж. круг. діа. } ab.$$

$$220' \times \frac{100'}{2} = 11000'' \text{ квад. } = \text{повер. кон. } avb.$$

$$220' \times \frac{70'}{4} = 3850'' = \text{площ. круг. діам. } ab.$$

$$11000''$$

$$3850''$$

$$14850'' = \text{цѣлой поверхности конуса.}$$

Доказ. справедливостъ сего видна въ § 415.

423. ЗАДАЧА. Прямой четверосторонной отрѣзной пирамиды ag , известны бокъ большаго квадрата $dc = 80^\circ$, меньшаго $gh = 20^\circ$ и наклоненный бокъ $dh = 120^\circ$; сыскать поверхность оной.

Рѣшен.

ф.
297.

Рѣшен. Свѣди въ трапеціи $dhgc$ перпендикуляръ hp (159), сумму боковъ квадрата ac сложи съ суммою боковъ квадрата eg ; умножь половину сей суммы перпендикуляромъ hp , получишь требуемую поверхность безъ основаній (416); а чтобъ сыскать цѣлую поверхность, по слѣдуетъ придасть къ сему произведенію плоскость верхняго квадрата eg и нижняго ac , получишь желаемое.

числами

$$80^{\circ} = dc. \quad 20^{\circ} = gh.$$

сысканная по (159) высота $hp = 116^{\circ}$.

$$80^{\circ} \times 4 = 320^{\circ} = \text{сум. бок. квадр. } ac.$$

$$20^{\circ} \times 4 = 80^{\circ} = \text{сум. бок. квадр. } eg.$$

$$320^{\circ} + 80^{\circ} = 400^{\circ} = \text{сум. окр. вер. и ниж. квад.}$$

$$\frac{400^{\circ}}{2} = 200^{\circ} = \text{полсум. окр. вер. и ниж. квад.}$$

$$\times 116$$

$$23200^{\circ} = \text{поверхн. пирамид.}$$

$$80^{\circ} \times 80^{\circ} = 6400^{\circ} = dc. \quad 20^{\circ} \times 20^{\circ} = 400^{\circ} = gh.$$

$$23200^{\circ} + 6400^{\circ} + 400^{\circ} = 30000^{\circ} = \text{цѣлой пов.}$$

пирам. ag .

424. ЗАДАЧА. По данному діаметру меньшаго круга $cd = 40^{\circ}$ большаго $ab = 100^{\circ}$, и наклоненному боку $ac = 130^{\circ}$ сыскать поверхность прямаго отръзнаго конуса $abcd$.

ф. **Рѣшен.** По діаметрамъ cd и ab , ссвѣди въ окружности круговъ, полсуммы сихъ
298. окружностей

окружностей умножь наклоненнымъ бокомъ ac , получишь поверхность конуса $abcd$ безъ основаній (417); попомъ придай къ сей поверхности площади обоихъ круговъ ab и cd получишь цѣлую поверхность конуса.

Числами.

$$ab = 100^\circ. \quad ac = 180^\circ. \quad cd = 40^\circ.$$

$$7 : 22 = 40^\circ : 122^\circ, \quad 7' = \text{окружн. круга } cd.$$

$$7 : 22 = 100 : 314, \quad 2' = \text{окружн. круга } ab.$$

$$436^\circ, 9' = \text{суммъ окружностей}$$

$$436^\circ, 9'$$

$$\frac{2}{2} \times 180^\circ = 39321^\circ \text{ квад.} = \text{повер. кон. сыскан. площадь}$$

$$\text{круга } cd = 1257^\circ$$

$$\text{плещ. круга } ab = 7857^\circ$$

$$48435^\circ \text{ квад.} = \text{цѣлой по- верьх. конуса.}$$

425. ТЕОРЕМА. Ежели отръзной конусъ $acdb$ разрѣжется плоскостію qr параллельною основанію ab чрезъ половину наклоненнаго бока ac , то окружность сего сѣченія будетъ равна полсуммѣ окружностей большаго круга ab и меньшаго cd .

Доказ. Чрезъ половину наклоненнаго бока bd проводи линію xry параллельно боку ac , продолжи cd до y . Діаметръ qr No 4
будетъ = полсуммѣ діаметровъ cd и ab ; Ф. 326.
ибо

ибо треугольникъ dry = треугольнику brx ,
 потому что $dr = rb$ по положенію, уголъ
 $yrd = xrb$, уголъ $rdy = rbx$, слѣдователь-
 н $dy = bx$ (31); по сему $cy = dy + cd$,
 $ax + (xb) dy + cd = cy + ax =$ суммѣ
 діаметровъ $cd + ab$, но $cy = ax = qr$:
 по сей причинѣ $cd + ab = 2ax = 2qr$,
 слѣдовательно $\frac{1}{2}(cd + ab) = qr$. И такъ
 (положа окружность круга $cd = s$ окру-
 жность круга $ab = z$, окружность круга
 $qr = t$) будетъ $cd : s = ab : z = qr : t$
 (248), а для равенства содержаніи $cd + ab$
 $: s + z = qr : t$ (ариф. 222): но $\frac{1}{2}(cd + ab)$
 $= qr$, слѣдовательно $\frac{1}{2}(s + z) = t$, то есть
 окружность круга діаметра qr равна пол-
 суммѣ окружностей большаго круга ab и
 меньшаго cd .

426. ТЕОРЕМА. Шаръ A состоитъ изъ
 нечисленнаго числа отрѣзныхъ кону-
 совъ.

Ф. 327. Доказ. Понеже шаръ происходитъ отъ
 обращенія полукруга abk около своего діа-
 метра ab (387); но есть ли полукруга
 $afkqb$ почесъ за половину правильнаго
 многоугольника имѣющаго не исчисленность
 боковъ, и положимъ что изъ всѣхъ его
 угловъ опущены линіи dr, fs, ht и проч.
 перпендикулярно къ оси ab : то оныя ли-
 ніи по двѣ взятыя рядомъ сочинятъ
 нечисленное число прямоугольныхъ пра-
 вецій $drsf, fsht$ и проч. которыя въ
 обращеніи

обращеніи полкруга abk , составляющъ столько же отрѣзныхъ конусовъ $aydc$, $dcef$, $fegh$ и проч. слѣдовательно шаръ можно почитать составленнымъ изъ безконечнаго числа отрѣзныхъ конусовъ, кои хотя не равной но безмѣрно малой высоты.

Примѣч. Понеже всякая точка окружности какъ d , f , h и проч. когда полукружіе обращается описываетъ кругъ, котораго радіусъ линія dr , fr и проч. то изъ сего видно, что сѣченіи шара будутъ круги: но какъ изъ оныхъ самая большая линія есть kz — радіусу полукруга abk (79); посему самой большей кругъ будетъ пошъ, коего плоскость проходитъ чрезъ центръ z .

427. ТЕОРЕМА. Поверхность шара A равна произведенію діаметра ab на окружность большаго круга.

Доказ. Ибо шаръ состоитъ изъ безконечнаго числа отрѣзныхъ конусовъ: ф. 327. то пусть одинъ изъ оныхъ будетъ конусъ $gcdh$, коего бокъ gc есть дуга seg безконечно малая часть окружности, которую безъ погрѣшности почестъ можно за прямую линію. Изъ точки e или середины cg проведи ef въ параллель gh ; и чрезъ центръ шара діаметръ eq , изъ точки c на gh опусти перпендикуляръ co , которой будетъ равенъ оси rt отрѣзнаго конуса, проведя fq будущъ прямоуголь-

ные треугольники gco и efq подобны; ибо уголъ $fec = ogc$ для параллельныхъ линіи gh и ef , и чпо cg безъ конечно малая часть окружности естъ прямая линія: но мѣра угла fec также и угла eqf естъ половина дуги ef (91. 93), посему уголъ $ogc =$ углу eqf , уголъ $goc = eqq$ прямые, и уголъ $gco = feq$; чего ради $cg : (co)rt = eq : ef$ (104): но окружности круговъ содержащя какъ ихъ діаметры (248), посему (положа окружность, діаметра $eq = x$ а діаметра $ef = y$) будетъ $cg : rt = x : y$ (ариф. 229), при чемъ $cg \times y = rt \times x$ (ариф. 222); но окружность $y =$ полсуммѣ окружностей діаметра cd и діаметра gh (425), посему $cg \times y =$ поверхности опрѣзнаго конуса $cdhg$ (417), слѣдовательно поверхность онаго конуса $= rt \times x =$ произведенію оси rt умноженной окружностію x большаго круга шара. Равнымъ образомъ докажется, чпо поверхность опрѣзнаго конуса $ghki$ и проч. $=$ произведенію его оси tz умноженной пою же окружностію; слѣдственно сумма поверхностей всѣхъ конусовъ, шо естъ поверхность цѣлаго шара, равна произведенію изъ суммы всѣхъ ихъ осей составляющихъ цѣлую ось или діаметръ шара ab на окружность большаго круга шара. Изъ сего явствуемъ, чпо поверхность шара равна такому параллелограму, коего высота діаметръ ba а основаніе равно окружности большаго круга.

Слѣдств.

Слѣдств. I. Изъ того жѣ видно, что поверхность сферѣа шара *стауд* равна произведенію окружности большаго круга шара умноженной высокою *аг* части шара. Также и поверхность зоны *efki* равна произведенію, изъ окружности большаго круга шара и высоты зоны *гз*.

Слѣдств. II. Поверхность шара, вчетверо болѣе площади большаго круга. Ибо площадь большаго круга шара, равна произведенію его діаметра *eq* четвертью окружности $\frac{1}{4}x$, то есть $= \frac{1}{4}x \times eq$ а поверхность шара равна произведенію діаметра *eq* или *ab* окружностію *x* того жѣ большаго круга умноженнаго, то есть $= x \times eq$; по сему *eq* \times *x* вчетверо больше $\frac{1}{4}x \times eq$.

Слѣдств. III Изъ перваго слѣдствія видно, что поверхности параллельныхъ частей шара *gcdh* и *ghki* и проч. содержащія между собою какъ ихъ высоты *tr* и *tz*. Ибо поверхность части шара *gcdh* $= x \times tr$, а поверхность части шара *ghki* $= x \times tz$, по сему $x \times tr : x \times tz = tr : tz$, для того что произведеніе крайнихъ $x \times tr \times tz =$ произведенію среднихъ $x \times tz \times tr$. Слѣдовательно оныя члены пропорціональны.

422. ЗАДАЧА. По данному діаметру шара *ab* $= 1000^\circ$ сыскать поверхность онаго.

Рѣшен. По діаметру *ab* сыщи окруж- **№13** ность большаго круга шара (256), копо- ф- рую умножа діаметромъ *ab* получишь 299- требуемую поверхность.

С а по

по естѣ.

$7 : 22 = 1000^\circ : 3142^\circ, 857''' = \text{окруж.}$
 $3142, 857''' \times 1000^\circ = 3142857^\circ \text{ ква.} =$
 повер. шар.

Прибавл. Если будетъ извѣстна поверхность шара, то онаго діаметръ ab сыщется слѣдующимъ образомъ: раздѣли поверхность шара на чепырѣ равныя части, получишь площадь круга діаметра ab (427); а по извѣстной площади круга сыщи діаметръ ab (262).

429. ТЕОРЕМА. Поверхность отрѣзка шара eaf равна площади круга ко-его радіусъ хорда ae .

ф. *Доказ.* Ибо (положа площадь круга радіуса $az = y$, окружность его $= p$ площадь круга радіуса $ae = x$) будетъ $y : x =$
 $\frac{-2}{-2} \frac{-2}{-2} az : ae$, а умножа предъидущіе члены чрезъ
 4 , будетъ $4y : x = (\frac{-2}{-2} \frac{-2}{-2} 4az) ab : ae$ (ариф. 234):
 но $ab : ae = ab : az$ (181), по сему $4y : x =$
 $= ab : az$, по умноженіи жѣ членовъ вѣснорого
 содержанія на окружность p , будетъ $4y : x =$
 $= ab \times p : az \times p$ но $ab \times p = 4y =$ поверъ-
 хности шара (427); слѣдовательно $az \times p = z$ (ариф. 248), то естѣ поверхность
 отрѣзка шара eaf (427) $=$ площади круга
 радіуса ae .

430. ЗАДАЧА. По извѣстной хордѣ $ef = 120^\circ$, и высотѣ $as = 40^\circ$ отрѣзка шара eaf , сыскать цѣлую поверхность оной. Рѣшен.

Рѣшен. Раздѣли ef на двѣ равныя части, сдѣлай слѣдующую пропорцію, $as : es = es : sb$ (172), сложи as съ bs , сумма будетъ = діаметру ab . По діаметру ab сыщи окружность большаго круга шара (256), умножь оную выотою as , получишь поверхность опрѣзка шара eaf (427); потомъ по извѣстному діаметру ef сыскавъ площадь круга, придай къ поверхности опрѣзка шара получишь желаемое. Ф.
301.

Числами.

$$40^{\circ} = as. \quad 120^{\circ} = ef. \quad \frac{120^{\circ}}{2} = 60^{\circ} = es.$$

$$as : es = es : sb$$

$$40^{\circ} : 60^{\circ} = 60^{\circ} : 90^{\circ} = sb$$

$$40^{\circ}$$

$$130^{\circ} = \text{діаметр. } ad.$$

$$7 : 22 = 130^{\circ} : 408^{\circ}.57'' = \text{окр. бол. кр. (256).}$$

$$408^{\circ}.57''$$

$$\times 40^{\circ}$$

$$16342^{\circ}.80'' \text{ квад.} = \text{повер. опрѣз. шар. (429)}$$

$$120^{\circ} \times 120^{\circ} = 14400^{\circ} = ef.$$

$$14 : \pi = 14400^{\circ} : 11314^{\circ} 28'' = \text{плоч. круг.}$$

$$16342^{\circ}.80''.$$

$$\text{діам. } ef \text{ (261).}$$

$$11314^{\circ}.28''.$$

$$27657^{\circ}.08'' \text{ квад.} = \text{цѣлой повѣр. опр. шар. } efa$$

ДРУГИМЪ ОБРАЗОМЪ

По звѣстной as и es сыщи ae (146), потомъ сыщи площадь круга радіуса ae , получишь поверхность опрѣзка шара eaf

(429), а придавъ къ оной площадь круга диаметра ef будетъ цѣлая поверхность опрѣзка шара.

Слѣдств. Когда дана будетъ поверхность опрѣзка шара esf и высота as : по диаметръ ab сыщется; ибо раздѣля поверхность на высоту as , частное будетъ = окружности большаго круга диаметра ab , а по окружности онаго сыщется диаметръ ab .

431. ЗАДАЧА. По известной хордѣ ef и высотѣ as падающей на половину хорды f , сыскать цѣлую поверхность вырѣзка шара $ezfa$.

Рѣшен. По предѣидущей задачѣ сыскавъ Φ . 500. диаметръ ab опрѣдели поверхность опрѣзка шара esf , безъ круга диаметра ef ; потомъ сыскавши поверхность конуса efz (422): сложи съ поверхностью опрѣзка, получишь цѣлую поверхность вырѣзка шара.

Примѣан. Для сысканія поверхности каждаго правильнаго тѣла, надлежитъ прежде по известному боку опредѣлить площадь одной его спороны, а потомъ умножить оную на число споронъ окружающаго оное тѣло, будешь имѣть поверхность онаго.

О СОДЕРЖАНІИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТѢЛЪ.

432. Опредѣл. Подобныя тѣла называющіяся тѣ, коихъ всѣ сходственныя углы равны

равны и припомѣ ограничивающіяся равнымѣ числомѣ подобныхѣ плоскостей, коихѣ сходственныхѣ бока или ихѣ части пропорціональны.

433. ТЕОРЕМА. Поверхности подобныхѣ конусовѣ, содержатся между собою какѣ квадраты сходственныхѣ боковѣ.

Доказ. Пусть будутѣ подобные конусы No14 abc и def : то (положа окружность діаметра $ф.$ $ac = x$, а окружность діаметра $df = y$) 328 для подобія конусовѣ $ab : de = ac : df$ 329. (104) $= x : y$ (248); по сему $x : y = ab : de$ (ариф. 229), умножь предѣдущіе члены чрезѣ ab , а послѣдующіа чрезѣ de , будетѣ $ab \times x : de \times y = \overset{-2}{ab} : \overset{-2}{de}$ (ариф. 235); потомѣ раздѣля члены перваго содержанія на двѣ равныя части, будетѣ $\frac{ab \times x}{2} : \frac{de \times y}{2} = \overset{-2}{ab} : \overset{-2}{de}$; но $ab : de = ac : df$; такъ же $\overset{-2}{ab} : \overset{-2}{de} = \overset{-2}{ac} : \overset{-2}{df}$ (ариф. 245), по сему $\frac{ab \times x}{2} : \frac{de \times y}{2} = \overset{-2}{ab} : \overset{-2}{de} = \overset{-2}{ac} : \overset{-2}{df}$: но $\frac{ab \times x}{2}$ есть поверхность конуса abc , а $\frac{de \times y}{2} =$ поверхности конуса def (415), слѣдовательно поверхности подобныхѣ конусовѣ какѣ квадраты сходственныхѣ боковѣ или діаметровѣ основанія.

Слѣдст. I. Изѣ того видно, что вообще поверхности какихѣнибудь по-

добныхъ тѣлъ, содержатся между собою какъ какъ квадраты сходственныхъ боковъ. Ибо два подобные тѣла имѣютъ всѣ ихъ сходственные стороны подобны, кои ихъ одинакія бока пропорціональны (432), и площади тѣхъ сторонъ содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ (275), слѣдственно и сумма сторонъ, то есть поверхность одного тѣла къ поверхности другого, какъ квадратъ бока одного, къ квадрату сходственнаго бока другого тѣла. На примѣръ поверхность прямой пирамиды $abcd$ будетъ къ поверхности пирамиды $fghi =$

№15 $\frac{dc}{hi}$ или $\frac{bc}{gh}$, потому что изъ по-
ф.

330 добныхъ треугольниковъ $dbc : hgi = \frac{dc}{hi}$

331. или $\frac{bc}{gh}$ (164), а умножа члены перваго содержанія чрезъ 3 будетъ $3dbc : 3hgi = \frac{dc}{hi} = \frac{bc}{gh}$ (ариф. 232), то есть

поверхность пирамиды $abcd$ къ поверхности пирамиды $fghi = \frac{dc}{hi} = \frac{bc}{gh}$.

Основаніе жъ $adc : fin = \frac{dc}{hi} = 3dbc : 3hig$ (ариф. 229), посему $3dbc + adc : 3hig +$

$fin = \frac{dc}{hi}$ или $\frac{bc}{gh}$ (ариф. 241), то есть, и цѣлыя поверхности пирамидъ $abcd$ и $fghi$ какъ квадраты сходственныхъ боковъ.

ф. **Слѣдст.** Поверхности шаровъ какъ
332. квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ.
Ибо

Ибо (положа площадь большого круга діаметра $ab = x$ а площадь круга діаметра $eq = y$) $x : y = \overset{-2}{ab} : \overset{-2}{eq}$ (266), а умножа предъидущіе члены чрезъ 4 будетъ $4x : 4y = \overset{-2}{ab} : \overset{-2}{eq}$ (ариф. 232) или $\frac{1}{4} \overset{-2}{ab} : \frac{1}{4} \overset{-2}{eq} = \overset{-2}{az} : \overset{-2}{ez}$, но $4x =$ поверхности шара діаметра ab , и $4y =$ поверхности шара діаметра eq (227), слѣдовательно поверхности шаровъ какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.

434. ЗАДАЧА. Известна цѣлая поверхность конуса $abc = 100179^\circ, 56'$ и содержаніе наклоненнаго бока ab къ діаметру $ac = 7 : 3$; сыскать бокъ ab , и діаметръ ac .

Рѣшен. положимъ что конусъ def есть No 14
такой коего діаметръ $df = 3$ а наклонен- ф. 328
ной бокъ $de = 7$ часпямъ. И такъ по діа- 329.
метру df , и наклоненному боку de надлежитъ сыскать цѣлую поверхность онаго (422); и для подобія конусовъ def и abc (432) сдѣлавъ слѣдующую пропорцію: цѣлая поверхность конуса def содержишя къ поверхности даннаго конуса abc какъ $\overset{-2}{df} : \overset{-2}{ac}$ (433), $\overset{-2}{V}ac$ будетъ $=$ діаметру ac , а наконецъ $3 : 7 = ac$ къ наклоненному боку ab , какъ явствуеши изъ слѣдующаго примѣра:

Сысканная по (422) цѣлая повер. кон. $df = 40^\circ. 04''$.

$$3 \times 3 = 9 = df^2$$

$40^\circ. 04'' : 100179. 56'' = 9 : 22517^\circ =$ площ.
квад. діам. ac .

$$\sqrt{22517^\circ} = 150^\circ = ac$$

$3 : 7 = 150^\circ : 350 =$ наклонен. боку ab .

Примѣч. Такимъ образомъ по извѣстнымъ поверхностямъ и содержанію боковъ, сыскиваются бока или данныя части призмъ цилиндровъ и прочая.

435. ТЕОРЕМА. Поверхность прямого цилиндра de къ площади основанія df , какъ высота dh къ четверти діаметра df .

Нога 3 **Доказ.** Положимъ что окружность
ф. круга діаметра $df = y$, поверхность цилиндра будетъ $= dh \times y$ (413), а площадь круга діаметра $df = \frac{1}{4}df \times y$ (256); того ради будетъ $dh \times y : \frac{1}{4}df \times y = dh : \frac{1}{4}df$. Сія пропорція справедлива пошому, что произведеніе крайнихъ членовъ $\frac{1}{4}df \times dh \times y =$ произведенію среднихъ $\frac{1}{4}df \times dh \times y$ (ариф. 225).

436. ТЕОРЕМА. Поверхность прямого конуса abv къ площади основанія ab , какъ наклоненной боку bv къ радіусу bg .

Доказ.

Доказ. Положимъ окружность круга .ф. діаметра $ab = y$. Поверхность конуса 295. abu будетъ $= \frac{1}{2}bv \times y$ (422), а площадь круга радіуса $bg = \frac{1}{2}bg \times y$ (256), по сей причинѣ $\frac{1}{2}bv \times y : \frac{1}{2}bg \times y = bv : bg$, причемъ произведеніе крайнихъ членовъ $\frac{1}{2}bg \times bv \times y =$ произведенію среднихъ $\frac{1}{2}bg \times bv \times y$ (ариф. 29), слѣдовательно пропорція справедлива (ариф. 225).

Слѣдств. Изъ того явствуетъ, что поверхность прямого конуса abu , котораго кклонной бокъ $av =$ діаметру основанія ab , вдвое больше своего основанія; поелику наклоненной бокъ av будетъ вдвое больше радіуса ag ; слѣдовательно цѣлая поверхность такого конуса втрое больше площади круга основанія.

437. ТЕОРЕМА. Цѣлая поверхность цилиндра cf описаннаго около шара z къ поверхности онаго 3 : 2.

Доказ. Ибо (положа площадь круга діаметра cd или $ab = x$, поверхность шара ф. будетъ $= 4x$) поверхность цилиндра cf 333. безъ основаній содержится къ площади круга $x = ce : \frac{1}{4}cd$ (435); но высота ce вчетверо больше $\frac{1}{4}cd$ по положенію, посему поверхность цилиндра fc будетъ $= 4x$; а придавъ къ сей поверхности площадь круга діаметра cd и діаметра ef , то есть $2x$, цѣлая поверхность цилиндра будетъ $= 6x$; слѣдственно $6x : 4x = 6 : 4$ или 3. 2.

Слѣдств

Слѣдств. Цѣлая поверхность цилиндра коего діаметръ основанія равенъ высотѣ, вшестеро больше площади основанія, поелику $6x =$ цѣлой поверхности, а площадь основанія $= x$.

438. ТЕОРЕМА. Поверхность отрѣзка шара gih къ поверхности конуса ghi въ немъ вписаннаго, какъ бокъ gh къ радіусу gn .

Доказ. Ибо (положа площади круговъ, радіуса $gh = x$, радіуса $gn = y$, поверхность конуса $ghi = z$) $x : y = gh \times gh : gn \times gn$ (266), также $y : z = gn : gh$ (436), а умножа члены одной пропорціи на члены другой, будетъ $xy : yz = gh \times gn \times gn : gn \times gn \times gh$ (ариф. 243), попомъ раздѣляя члены перваго содержанія на y , втораго на $gh \times gn$, будутъ частныя $x : z = gh : gn$ (ариф. 240) : но $x =$ поверхности отрѣзка шара gih (429) : слѣдственно поверхность отрѣзка шара gih къ поверхности конуса ghi или z какъ $gh : gn$.

Слѣдств. Поверхность отрѣзка шара $kghilk$ вдвое поверхности равнобочнаго конуса khl въ немъ вписаннаго ; ибо тогда kh вдвое kp .

439. ТЕОРЕМА. Поверхность шара z къ цѣлой поверхности равнобочнаго конуса qsr около шара описаннаго, какъ 4 : 9.

Доказ. Понеже $qr = 2kl$ (258), посему $qr = 2kl$, слѣдственно $\overline{kl}^2 : \overline{qr}^2 = 1 : 4$; но $\overline{kl}^2 : \overline{ab}^2 = 3 : 4$ (205), слѣдственно $\overline{ab}^2 : \overline{qr}^2 = 1 : 3$ (ариф. 250) : также (положа площадь круга діаметра $ab = x$, площадь круга діаметра $qr = y$) будетъ $\overline{ab}^2 : \overline{qr}^2 = x : y$ (266) $= 1 : 3$ (ариф. 229) ; но поверхность шара вчетверо больше большаго круга

круга x (427), а цѣлая поверхность равнобоунаго конуса qsr впрое больше площади круга y , слѣдовательно сѣи поверхности, то есть $4x : 3y = x \times 4 : 3 \times 3 = 4 : 9$ (ариф. 236).

Слѣдств. I. Поверхность конуса khl вписаннаго въ шарѣ, къ поверхности шара какъ $9 : 16$. Ибо $\overline{kl}^2 : \overline{ab}^2 = 3 : 4$ (205), посему (положа площадь круга діаметра $kl = z$, площадь круга діаметра $ab = x$) $z : x = 3 : 4$ (256) : но поверхность конуса khl впрое больше площади основанія z , а поверхность шара вчетверо больше большаго круга діаметра $ab = 4x$; того ради умножа предъидущіе члены чрезъ 3 а послѣдующіе чрезъ 4, будетъ $3z : 4x = 3 \times 3 : 4 \times 4 = 9 : 16$ (ариф. 236), то есть поверхность конуса khl къ поверхности шара какъ $9 : 16$.

Слѣдств. II. Цѣлая поверхность равнобоунаго конуса khl вписаннаго въ шарѣ, къ поверхности описаннаго qsr какъ $1 : 4$; ибо для подобія оныхъ, поверхность конуса khl къ поверхности конуса $qsr = \overline{kl}^2 : \overline{qr}^2$ (433) или $1 : 4$.

440. ТЕОРЕМА. Если около шара $ahbt$ оишется цилиндръ, $cefd$ и равнобоуной конусъ qrs , то поверхности сихъ трехъ тѣлъ, будутъ содержаться между собою какъ $\div \div 4 : 6 : 9$.

Доказ. Ибо (опредѣля поверхность шара липс-рою z , поверхность цилиндра Q , поверхность конуса $= R$) $z : q = 2 : 3 = 4 : 6$ (437) $R : z = 9 : 4$ (439), а умножа члены одной пропорціи членами другой пропорціи, будетъ $Rz : qz = 36 : 24$, потомъ раздѣля члены перваго содержанія на z , а втораго содержанія на 4 , частное $q : R = 6 : 9$; по сей причинѣ $\div \div Z : Q : R = \div \div 4 : 6 : 9$.

Слѣдств.

Ф.
333.

Слѣдств. Изъ сего видно, что поверхность описаннаго цилиндра *сфд* есть средняя пропорціональная между поверхностью шара и поверхностью описаннаго конуса.

О ИЗМѢРЕНІИ ТОЛСТОТЫ ТѢЛЪ.

441. Опредѣл. Величина тѣла есть мѣсто или опредѣленное пространство тѣломъ занятое.

442. ТЕОРЕМА. Прямые или наклоненныя призмы и цилиндры имѣющія равныя высоты и основанія толстотою равны.

Ф. **Доказ.** Поелику толстоша cadaго изъ
 334 сихъ тѣлъ, состоитъ изъ коликаго чис-
 335 ла безмѣрно тонкихъ параллельныхъ и
 336. равныхъ основаніямъ слоевъ *тп*, (кои
 почестъ можно за плоскости) сколько въ
 ихъ высотахъ *сф* имѣется почекъ, но
 высоты *сф* между собою равны, слѣдова-
 тельно и сумма слоевъ cadaго тѣла,
 то есть толсты ихъ, равны между со-
 бою.

443. ТЕОРЕМА. Толстоты прямыхъ и наклоненныхъ призмъ и цилиндровъ, имѣющихъ равную высоту, содержатся между собою какъ ихъ основанія.

Доказъ

Доказ. Ибо въ разсужденіи одинакой вы-
сопы ef , каждое изъ сихъ пѣла имѣетъ
одинакое число равныхъ основаніямъ
слоевъ; и такъ положа что основаніе Φ .
призмы $dcf = A$, а основаніе ef цилиндра 335 .
 $cgef = B$, изъ коихъ на прим. A впрое
больше B , будетъ каждой слой m пер- Φ .
ваго, впрое больше cadaго слоя m 336 .
второго пѣла; того ради и сумма слоевъ
перваго пѣла, то есть полстопы призмы
 de , впрое больше суммы слоевъ вто-
раго пѣла, то есть полстопы цилиндра
 $cgef$; по сему $de : cgef = 3 : 1$, но $A : B$
 $= 3 : 1$ по положенію, слѣдовательно и
 $de : cgef = A : B$, то есть полстопы
призмы de къ полстопѣ цилиндра $cgef$
какъ основаніе dfc къ основанію cf .

Слѣдст. Того ради ежели въ кубѣ
или четвероспоронной призмѣ adg на- Φ .
пишется цилиндръ $acdb$; то будетъ 345 .
полстопы онаго къ полстопѣ куба или
призмы, какъ площадь основанія цилин-
дра къ квадрату діаметра ab : но пло-
щадь круга основанія къ квадрату діа-
метра ab , какъ четверть окружности
къ діаметру, или по Архимедову содер-
жанію $11 : 14$, а по Меціеву $355 : 452$
(261); слѣдовательно полстопы цилин-
дра къ полстопѣ куба adg или призмы
около онаго описанной какъ $11 : 14$ или
 $355 : 452$.

444. Опредѣл. Для измѣренія шѣлъ, берутся также шѣла определенной величины за единицу какъ то, кубическая сажень, кубической футъ, дюймъ и проч.

Примѣч. Кубическая сажень есть кубъ котораго каждое измѣреніе въ длину, ширину и высоту по сажени. Кубической футъ есть кубъ коего всѣ при измѣренія по футу и проч.

Слѣдст. Изъ предѣидущаго опредѣленія и примѣчанія ясно видимъ, что толстоша шѣла въ 100 кубическихъ футовъ, должна занять такое пространство, которое бы собою кубическими футами точно было наполнено.

445. ТЕОРЕМА. Толстога куба $abde$ равна произведенію изъ бока af или cf самага на себя умноженнаго два раза.

Ф. 337. **Доказ.** Положимъ что кубъ $abde$ есть кубическая сажень, котораго бокъ $fc = ab$ раздѣлится на 7 равныхъ частей, изъ коихъ пусть будетъ $bo = qc = \frac{1}{7}fc$ чрезъ точку q и o разрѣжъ кубъ плоскостію op параллельною основанію ae или bd ; отсѣченная часть qbd , будетъ седьмая часть куба $abde$. Раздѣли и бокъ cd на столько жъ равныхъ частей что бы hc была $= \frac{1}{7}cd$, чрезъ точку h разрѣжъ плоскостію параллельною плоскости bf , будетъ hqb попой же причинѣ седьмая часть шѣла qbd , то
есть

есть 49 я часть куба $abde$: такое жѢ дѣ-
лѣнїе сдѣлай на бокѢ bc чпо бы была nc
 $= \frac{1}{7} bc$, и ежели чрезѢ почку n плоскостїю
параллельною боку fd пересѣчется кубѢ $abde$:
по прѣма сими сѣченїями опдѣлился кубѢ,
по есть кубической футѢ nhq седьмая часть
• пѣла hqb , 49 я часть пѣла qbd и 343 я
часть куба $abde$; по сему 343 куба рав-
ныхѢ кубу nhq , наполняютѢ пространство
куба $abde$; слѣдовательно бокѢ куба cf
умноженной самѢ собою два раза, по есть
 $7' \times 7' \times 7' = 49'' \times 7' = 343'''$ кубическихѢ
футѢ, равны полстопѢ куба $abde$.

Примѣч. Подобными сѣченїями можно найти де-
сятую сотую и тысячную часть того же куба $abde$.
Также сыщется сотая и тысячная часть куба nqh ,
по есть десяти тысячная, стотысячная и миллїонная,
часть всего куба $abde$ и далѣе.

Слѣдст. ИзѢ сего явствуетѢ что россій-
ская кубическая сажень вѢ разсужденїи
геометрическаго раздѣленїа содержитѢ вѢ
себѢ 1000 кубическихѢ футѢ, футѢ 1000
кубическихѢ дюймовѢ и такѢ далѣе; вѢ
разсужденїи жѢ употребительнаго раздѣ-
ленїа, содержитѢ $7 \times 7 \times 7 = 343^0$ куби-
ческихѢ футѢ, а кубической футѢ 12×12
 $\times 12 = 1728$ кубическихѢ дюймовѢ и проч. *

Т

446.

* По сей причинѢ полстопу куба означать бу-
демѢ чрезѢ ab^3 , при чемѢ надлежитѢ выговаривать
кубѢ изѢ линїи ab .

Часть II

446. ТЕОРЕМА. Толстота всякой призмы или цилиндра ab равна произведенію изъ основанія A и высоты ab .

Ф. **358.** Доказ. Положимъ что изъ высоты ab сдѣланъ кубъ ac : то въ разсужденіи одинакой высоты ab , будетъ основаніе куба af или ab содержаться къ основанію цилиндра A , какъ толстота куба $\overset{-3}{=} ab$ къ толстотѣ цилиндра dab (443), то есть $\overset{-2}{ab} : A = \overset{-3}{ab} : dab$:

$$\frac{A \times \overset{-3}{ab}}{\overset{-2}{ab}} = A \times ab = \text{толстотѣ цилиндра}$$

dab ; но $A =$ площади основанія, $ab =$ высотѣ цилиндра db , слѣдовательно толстота цилиндра db равна произведенію изъ основанія A и высоты ab .

Ф. **335** **336.** Слѣдст. Изъ сего слѣдуетъ, когда площади основаній двухъ призмъ или цилиндровъ будутъ въ обратномъ содержаніи ихъ высотъ ; то оныя шѣла толстотою равны. Ибо (положа площадь основанія dcf призмы $de = x$, а площадь круга діаметра cf цилиндра $cgef = z$) будетъ $x : z = cg : ef$, при чемъ $x \times ef = z \times cg$ (ариф. 222) ; то есть толстота призмы $de =$ толстотѣ цилиндра $cgef$.

447. ЗАДАЧА. По известному боку $co = 50'$ и высотѣ $ef = 120'$ призмы de , сыскать оной толстоту. Рѣ

Рѣшен. По извѣстному боку cd сыщи площадь пятиугольника cog (250), которую умножа выскою ef получишь толстоту призмы de (446).

Числами.

Сысканная по (250) площ. пятиуг. $cog = 4250''$ квад. фут.

$$4250'' = cofgd$$

$$120. = ef$$

$$850$$

$$425$$

510000''' кубич. фут. = толст. призмы de .

448. ЗАДАЧА. По извѣстному діаметру $ab = 60'$ основанія и высотѣ $af = 100'$ цилиндра $abef$, сыскать онаго толстоту.

Рѣшен. По діаметру ab сыщи площадь Φ . круга, то есть площадь основанія цилиндра, которую умножа выскою af получишь требуемую толстоту, то есть

Сысканная по (256) площ. круг. діам. $ab = 2828''$ квад. фут.

2828'' = плоск. круг.

$$100' = af$$

282800''' куб. фут. = тол. цилин. $abef$.

449. ЗАДАЧА. Толстота цилиндра $abcd$, коего діаметръ основанія ab равенъ высотѣ ac извѣстна 86893''' , сыскать діаметръ ab .

Рѣшен. Сѣлай слѣдующую пропорцію;
 Ф. $\Pi : 14$ или $355 : 452$, такъ полстопа ци-
 345. линдра $acdb$ къ полстошѣ куба діаметра
 ab (443), котораго кубической корень
 будетъ равенъ діаметру ab , то есть

$$\Pi : 14 = 86893''' : 110591''' = \overset{-3}{ab}$$

$$\overset{5}{\sqrt{110591}} = 48' = \text{діаметр. } ab.$$

450. ТЕОРЕМА. Прямые или наклоненныя пирамиды и конусы имѣющіе равныя высоты и основанія, толсто-тою равны.

Доказ. Для изслѣдованія сего, возьмемъ
 Ф. въ доказательство пирамиду стоящую съ
 339 конусомъ на одной плоскости, коихъ вы-
 340. сота eg и eg равныя; и ежели представимъ себѣ что оныя пересѣчены плоско-
 стію qq параллельною ихъ основаніямъ: по сѣченіи orh и ph будутъ равны между собою. Ибо основаніе acd подобно сѣченію orh и всѣ бока одной параллельны сходственнымъ бокамъ другой фигуры; также sd параллельна th , посему треугольникъ sed подобенъ eth , треугольникъ seg подобенъ tef ; чего для $sd : th = se : te = ge : fe$ (104), изъ подобныхъ же треугольниковъ ged и feh конуса acd , $ge : fe = gd : fh$, и такъ для равенства содержаній будетъ $sd : th =$
 $gd : fh$, и $\overset{-2}{sd} : \overset{-2}{th} = \overset{-2}{gd} : \overset{-2}{fh}$ (ариф. 245), изъ
 подобныхъ же фигуръ $acd : orh = \overset{-2}{sd} : \overset{-2}{th}$
 (265)

(265); а положи площадь круга діаметра $ad = x$, площадь круга діаметра $ph = z$, будетъ $x : z = g\bar{d}^2 : f\bar{h}^2$ слѣдственно по причинѣ равенства содержаній $acd : orh = x : z$; но $acd = x$ по положенію, посему $orh = z$. Такимъ же образомъ докажемся, равенство всѣхъ прочихъ соотвѣствующихъ слоевъ оныхъ шѣлъ; слѣдственно пирамида $aced$ съ конусомъ aed имѣющія равныя высоты, состоятъ изъ одного числа между собою равныхъ и своимъ основаніямъ подобныхъ слоевъ, слѣдовательно толстотою равны.

451. ТЕОРЕМА. Толстоты прямыхъ и наклоненныхъ пирамидъ и конусовъ, имѣющихъ равную высоту, содержатся между собою какъ ихъ основанія.

Доказ. Ибо въ разсужденіи равной высоты eg , каждое изъ сихъ шѣлъ имѣетъ равное число подобныхъ основаніямъ слоевъ; и такъ положи что основаніе bcd пирамиды $aeb = A$, а основаніе am конуса $aed = x$, площадь круга діаметра $ph = z$, будетъ по предъидущей теоремѣ каждой сходствующей слой $orh : z = A : x$; того ради и сумма всѣхъ слоевъ, то есть толстота пирамиды aeb къ суммѣ всѣхъ слоевъ, то есть къ толстотѣ конуса aed , какъ основаніе A къ основанію x (ариф. 241).

452. ТЕОРЕМА. Толстота всякой пирамиды abd , или конуса aed , равна произ-

веденію изъ площади основанія и одной трети высоты de .

Доказ. Представимъ себѣ что слѣланъ кубъ fhm коего высота $gh = fg$ вдвое высоты de пирамиды abd . полстопа сего куба будетъ состоятъ изъ шести равныхъ между собою пирамидъ $pnfog$, $mknpl$ и проч. коихъ верьхи сообщаются въ цѣнпрѣ p , а основаніе каждой пирамиды естъ квадратъ опредѣляющей сторону куба fh или fo (396); по сему высота pq пирамиды $pnfog = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}fg =$ высотѣ de пирамиды adb по положенію. И такъ полстопа куба fhm будетъ равна $fg \times fg \times fg = \overline{fg}^3$ или $2de \times 2de \times 2de = \overline{8de}^3$ (445); по сему полстопа одной изъ равныхъ пирамидъ $pnfgo = \frac{\overline{8de}^3}{6} = \frac{\overline{4de}^3}{3}$: но полстопы пирамидъ имѣющихъ равныя высоты содержащя какъ ихъ основанія; по сей причинѣ $fg \times fg = \overline{fg}^2$ или $2de \times 2de = \overline{4de}^2$, то естъ площадь основанія пирамиды npg къ площади основанія acb пирамиды adb , содержится какъ полстопа пирамиды $\frac{\overline{4de}^3}{3}$ къ полстопѣ пирамиды adb (451), то естъ $\overline{4de}^2 : acb = \frac{\overline{4de}^3}{3} : acb$, которой полстопа по умноженіи вѣсорого члена прешымъ и раздѣля на первой будетъ $= acb \times \frac{\overline{4de}^3}{8} : \overline{4de}^2 = acb \times \frac{de}{8}$ (ариф. 254): но acb естъ

есть площадь основанія, и $\frac{de}{3} = \frac{1}{3}$ высоты пирамиды adb , слѣдовательно полстопы $acb \times \frac{de}{3}$ пирамиды adb , равна произведенію изъ основанія и одной третьей высоты de .

Слѣдст. Изъ сего ясно видно, что всякая призма af будетъ втрое больше пирамиды $agcb$, которая имѣетъ съ оною равное основаніе acb и высоту gd . ф. Ибо полстопы призмы af равна произведенію, изъ площади основанія acb высотой gd умноженнаго; а полстопы пирамиды $agcb$ равна произведенію той же площади основанія acb , одною третьей высоты gd умноженнаго; слѣдовательно первое произведеніе втрое больше втораго, то есть полстопы призмы втрое больше пирамиды. Тожѣ должно разумѣть что и цилиндръ $abef$ будетъ втрое больше конуса adb имѣющаго съ нимъ равное основаніе acb и высоту cd . 343.

453. ЗАДАЧА. По известному боку $ab = 30'$ основанія abc и наклоненному боку $ad = 70'$, трехсторонней пирамиды adb , сыскать оной толстоту.

Рѣшен. По данному боку ab равностороннаго треугольника abc сыщи радиусъ ф. ae (206), потомъ по радиусу ae и наклоненному боку ad сыщи высоту de (147), а наконецъ сыскавъ площадь рав-

ностороннаго треугольника abc умножь оную чрезъ одну претъ высоты de , получишь желаемую полспоту.

Числами.

$$\begin{aligned} 70' \times 70' &= 4900' = ad \\ 30' \times 30' &= 900' = ab \cdot \frac{900}{3} = 300'' = \frac{1}{3}ab = ae \\ 4600'' &= ad - ae = de. \end{aligned}$$

$$\sqrt{4600''} = 678'' = de$$

сысканная площ. $\triangle abc = 38850''^V$ квад. дюй.

$$\begin{array}{r} 678'' \quad 226'' \\ 3 \quad \quad \quad 23310 \\ \hline 7770 \\ 7770 \\ \hline 8.780100''^V \end{array} = \frac{1}{3}de$$

$8.780100''^V = \text{пол. пир. } adbc.$

Примѣч. Такимъ же образомъ образомъ сыщется полспота всякой пирамиды.

454. ЗАДАЧА. По известнымъ, діаметру основанія $ad = 60'$ и наклоненному боку $ae = 100'$ прямого конуса aed , сыскать онаго толстоту.

Рѣшен. По радіусу ag и наклоненному ф. боку ae сыщи высоту ge (147), потомъ сыскавъ площадь круга діаметра ad , умножь оную одною претъ высоты ge ; произведеніе будетъ требуемая полспота конуса aed (449), то есть

100'

$$100' \times 100' = 10000' = ae. \frac{60}{2} = 30' = \frac{1}{2}ad = ag.$$

$$30' \times 30' = 900'' = ag$$

$$9100'' = ae - ag = eg.$$

$$\sqrt[2]{9100''} = 95' = eg.$$

сысканная по (256) площ. круг. = 2828''.

2828' $\times \frac{25}{8}$ = 89553 куб. фут. = пол. кон. *aed*.

Слѣдств. Ежели будетъ извѣстна пол-
стопа конуса *aed* и высота *ge*, то дѣ-
аметръ основанія *ad* сыщется; ибо раз-
дѣля полстопу конуса *aed*, на одну
третъ высоты *ge*, частное будетъ равно
площади круга дѣаметра *ad*, а по площа-
ди онаго найдеся дѣаметръ *ad* (262).

455. ТЕОРЕМА. Площадь прямоугольника
изъ двухъ какихъ нибудь линѣй *ag* и *am*
есть средняя площадь между квадратами
тѣхъ же линѣй.

Доказ. Должно доказать что $ag : ag \times am = \frac{-2}{-2} \quad \Phi.$
 $ag \times am : am$, справедливостъ сей пропорціи видна 346.
изъ того, что произведеніе крайнихъ $ag \times am = \frac{-2}{-2}$
произведенію среднихъ $ag \times ag \times am \times am = \frac{-2}{-2} ag \times am$
(ариф. 225).

456. ЗАДАЧА. сыскать среднюю геометри-
ческую площадь между двухъ какихъ ни-
будь правильныхъ многоугольниковъ имѣю-
щихъ одно число боковъ.

Рѣшен. Сдѣлай прямоугольникъ *mg*, котораго $\Phi.$
бы основаніе *am*, быдо равно окружности правильна- 346.

го многоугольника bck , а высота ag равна половинѣ высоты fh подобнаго многоугольника del ; по оной прямоугольникъ будетъ желаемая средняя площадь между показанныхъ многоугольниковъ.

Доказ. Когда положимъ что окружность многоугольника bck равная $am = x$, высота $np = y$, окружность многоугольника $del = v$, а высота $fh = z$, высота ag прямоугольника $gm = \frac{z}{2}$; по будетъ $x : v = y : z$ (248), причемъ $x \times z = v \times y$ (ариф. 222), площадь же многоугольника $bck = \frac{1}{2} x \times y$, площадь многоугольника $del = \frac{1}{2} v \times z$ (249), а площадь прямоугольника $mg = \frac{1}{2} z \times x$ (133); того ради будетъ $\frac{1}{2} x \times y : \frac{1}{2} x \times z = \frac{1}{2} x \times z : \frac{1}{2} v \times z$; ибо произведеніе крайнихъ $\frac{x \times z \times v \times y}{4}$ равно произведенію среднихъ $\frac{x \times z \times x \times z}{4}$, пошему что $v \times y = x \times z$ докажется изъ предписанной пропорціи, и $x \times z = x \times z$; слѣдовательно прямоугольникъ mg есть средняя геометрическая площадь между правильными многоугольниками bck и del .

Слѣдств. Такимъ же образомъ сыщется средняя площадь между двухъ круговъ; ибо круги ни что иное, какъ правильные многоугольники имѣющіе безконечное число боковъ. И такъ для сысканія средней площади числами, должно окружность одного многоугольника, умножить половиною перпендикуляра отъ центра другаго многоугольника; а для сысканія средней площади между двухъ круговъ, окружность одного половиною радіуса другаго круга.

457. ЛЕММА. Разность двухъ кубовъ $edgbe$ и $kpln$, равна тремъ призмамъ, изъ коихъ основаніе первой квадратъ бока большаго куба; другой, основаніе прямоугольникъ составлен-

составленной изъ боковъ большаго и меньшаго куба; третій, основаніе квадрата бока меньшаго куба, а высота каждой изъ сихъ призмъ равна разности боковъ тѣхъ же кубовъ.

Доказ. Положимъ что изъ куба $edge$ вырѣзать Φ . должно кубъ $kplk$, коего бока $kf = ki = fp$; того ради чрезъ точку k , разрѣжъ кубъ $edge$ плоскостію параллельною его сторонамъ ah или dg , опсѣченная часть $esve$ будетъ призма, коюрой основаніе $abhe$ — квадрату бока ae большаго куба, а высота $ek = ef - fk$ — разности боковъ большаго и меньшаго куба. Чрезъ точку l оставшее тѣло $kdgk$ разрѣжъ плоскостію $ilrq$ параллельною сторонамъ fg или cv ; опсѣченная часть $irgi$ будетъ призма, имѣющая основаніе прямоугольникъ $icrl$ составленной изъ бока $lr = ef$ большаго куба, и бока il меньшаго куба, а высоту $lg = fg - fl = ef - fk$ — разности боковъ обоихъ кубовъ; и ежели чрезъ точку p оставшее тѣло kdq разрѣжется плоскостію параллельною сторонамъ kl меньшаго куба; то отдѣлился призма $odmq$, коюрой основаніе om есть квадратъ бока меньшаго куба, а высота $dp = fd - fp = ef - kf$ — разности боковъ тѣхъ же кубовъ; слѣдовательно сумма сихъ трехъ призмъ, равна разности двухъ кубовъ $edge$ и $kpln$. И такъ есть ли положимъ что большаго куба бока $ef = x$, меньшаго куба $kf = z$, разность боковъ сихъ кубовъ $ek = ef - kf = x - z$: то будетъ полстома первой призмы $esve = x \times (x - z)$, полстома другой $irgi = x \times z \times (x - z)$; полстома третей призмы $odmq = z \times (x - z)$, коихъ сумма вообще равна $x \times (x - z) + x \times z \times (x - z) + z \times (x - z)$

$\overset{-2}{=} (x + x \times z + z) \times (x - z) \overset{-3}{=} x^2 - z^2$, то есть равна разности кубовъ *edge* и *kpln*.

458. ТЕОРЕМА. Толсто́та отръзной пирамиды *asge* равна произведенію, изъ суммы плоскостей двухъ квадратовъ *ac* и *eg* съ среднею геометрическою плоскостію между тѣхъ же квадратовъ и одной трети высоты *ik*.

Ф. 297. Доказ. Продолжи бокъ *ae* и ось *ik*, кои взаимно пересѣкутся въ точкѣ *n*, проводи *el* параллельно оси *ki*, будетъ треугольникъ *abi* подобенъ *efk*, по сему положи бокъ *ab* $\overset{-2}{=} x$, бокъ *ef* $\overset{-2}{=} z$, высоту *ki* $\overset{-2}{=} el \overset{-2}{=} y$; будетъ $x : z \overset{-2}{=} ai : ek$ или li , и $x - z : x \overset{-2}{=} (ai - li) al : ai$, также $x - z : z \overset{-2}{=} (ai - li) al : ek$; въ разсужденіи жъ подобства треугольниковъ *ael*, *ain* и *ekn*, будетъ $al : ai \overset{-2}{=} y : in$ и $al : ek \overset{-2}{=} y : kn$ (104); по сему для равенства сихъ содержаній съ первыми будетъ $x - z : x \overset{-2}{=} y$ къ высотѣ *in*, которая по умноженіи втораго члена претъимъ и раздѣля на первой будетъ $\overset{-2}{=} \frac{x \times y}{x - z}$; также $x - z : z \overset{-2}{=} y$ къ высотѣ *kn*, которая въ семъ случаѣ будетъ равна $\overset{-2}{=} \frac{z \times y}{x - z}$. И такъ умножа площадь квадрата *ac* $\overset{-2}{=} x^2$, одною претъю высоты *in*, то есть чрезъ $\overset{-2}{=} \frac{x \times y}{(x - y)_3}$, произведеніе $\overset{-2}{=} x^2 \times \frac{x \times y}{(x - z)_3}$ будетъ $\overset{-3}{=} \frac{x^3 \times y}{(x - z)_3}$ равно толсто́тѣ пирамиды *asp* (452). А умножа площадь квадрата *eg* $\overset{-2}{=} z^2$, одною претъю высоты *kn* то есть чрезъ $\overset{-2}{=} \frac{z \times y}{(x - z)_3}$, произведе-

деніе

деніе $z \times \frac{z \times y}{(x-z)^3} = \frac{z \times y}{(x-z)^3}$ равно полстпотѣ пи-

рамыды *egn*; которую вычтя изъ полстпоты первой, останется полстпота опрѣзной пирамиды *асге* =

$$\frac{x \times y - z \times y}{(x-z)^3} = \frac{x-z}{(x-z)} \times \frac{y}{z^3} : \text{но по предѣдущей}$$

леммѣ, $x-z = (x+z \times x+z) \times (x-z)$, а по раздѣленіи обѣихъ количествъ на $x-z$, чашп-

ное $\frac{x-z}{x-z}$ будетъ $= x+z \times x+z$; по сей при-

чинѣ $\frac{x-z}{x-z} \times \frac{y}{z^3} = (x+x \times z+z) \times \frac{y}{z^3} =$

полстпотѣ опрѣзной пирамиды (ариф. 35); но $x \times z$

есть средняя площадь между x и z , то есть между квадрами бока *ab* и *ef* (455), слѣдовательно полстпота опрѣзной пирамиды *асге*, равна произведенію изъ суммы площадей двухъ квадратовъ *ac* и *eg* съ среднею площадью между сихъ квадратовъ, умноженной одною третью высоты *ik*.

Слѣдств. Такимъ же образомъ докажется, что полстпота всякой опрѣзной пирамиды, равна произведенію суммы плоскостей большаго и меньшаго основанія съ среднею площадью между оными, одною третью ея высоты умноженной.

459. ЗАДАЧА. Въ прямостоящей опрѣзной пирамидѣ *асге*, дано большаго квадрата боку $ad = 80'$, меньшаго $= 20'$, наклоненному боку $ae = 120'$; сыскать толстоту оной.

Рѣшен. Продолжи бокъ *ae*, и ось *ki* пока пересѣкутся въ *n*, проведи *el* парал. дельно

лельно оси ki , сыщи дѣгоналъ ac квадра-
та $abcd$, раздѣли оную на двѣ равныя
части, частное будетъ $= ai$. Равнымъ
образомъ сыщется и ek , вычпи $ek = li$
изъ ai , останеся al . Въ прямоугольномъ
треугольникѣ aek сыщи el (147), потомъ
для подобныхъ треугольниковъ aek , ekn ,
и ain сдѣлай слѣдующую пропорцію : какъ
разномъ al къ высотѣ el , такъ ek будетъ
содержася къ высотѣ kn ; такъ же $al : el$
 $= ai$ къ высотѣ in . По известной пло-
щади основанія $ehgf$ и высотѣ kn сыщи
полстопу пирамиды egn , равнымъ образомъ
и полстопу пирамиды asn (453); напоследъ-
докъ вычпи полстопу пирамиды egn изъ
полстопы пирамиды asn , остатокъ бу-
детъ пребуемая полстопа отрѣзной пира-
миды $asge$.

Или высказъ среднюю геометрическую
площадь между основаніями пирамиды и
сложь оную съ основаніями вмѣстѣ, ум-
ножь сумму сихъ плоскостей одною
претью высоты ki , получишь полстопу
отрѣзной пирамиды $asge$ (458).

Числами.

$$300'' \times 300'' = 640000''^2 = ad.$$

$$640000 \times 2 = 1280000''^2 = ac$$

$$\sqrt{1280000''^2} = 1131'' = as.$$

$$\frac{1131''}{2} = 565'' = \frac{1}{2}as = ai.$$

$$200'' \times 200'' = 40000''^V = {}^{-2}eh$$

$$40000''^V \times 2 = 80000''^V = {}^{-2}eg$$

$$\sqrt{80000''^V} = 282'' = eg. \frac{282''}{2} = 141'' = \frac{1}{2}eg$$

$$565'' = ai.$$

$$= ek.$$

$$141'' = ek = li.$$

$$424'' = al.$$

$$1200'' \times 1200'' = 1440000''^V = {}^{-2}ae$$

$$424'' \times 424'' = 179776''^V = {}^{-2}al$$

$$1260224''^V = {}^{-2}ae - {}^{-2}al = {}^{-2}el.$$

$$\sqrt{1260224''} = 1122'' = el$$

$$al : el = ek : kn.$$

$$m. e \ 424'' : 1122'' = 141'' : 373'' = kn$$

$$\frac{373''}{3} = 124'' = \frac{1}{3}kn.$$

$$al : el = ai : in.$$

$$m. e \ 424'' : 1122'' = 565'' : 1495'' = in.$$

$$\frac{1495''}{3} = 498'' = \frac{1}{3}ni.$$

$$640000''^V \times 498'' = 318720000''^V = {}^{-2}ad \times \frac{1}{3}ni$$

$$= \text{полс. пир. } ascn$$

$$40000''^V \times 124'' = 4960000''^V = {}^{-2}eh \times \frac{1}{3}kn$$

$$= \text{полс. пир. } egn.$$

$$318720000''^V - 4960000''^V = 313760000''^V =$$

$$\text{пол. опрѣ. пир. } asge.$$

ИЛИ

Или

$$800'' \times 800'' = 640000''^2 = ad^2$$

$$200'' \times 200'' = 40000''^2 = eh^2$$

$$800'' \times 200'' = 160000''^2 = ad \times eh = \text{сре. гео. пл.}$$

$$\frac{1121''}{3} = \frac{840000''^2 \text{ сумма плоскостей}}{374''} = \frac{1}{3}el = \frac{1}{3}ki$$

$$3360000$$

$$5880000$$

$$2520000$$

$$31416000 = \text{пол. опр. пир. } asce.$$

Примѣч. Съ последнее рѣшеніе сокращеніе и вернѣе перваго, для того, что въ первомъ рѣшеніи при извлеченіи радикаловъ и прочихъ вычисленіи, много выпускается дробей, слѣдовательно въ первомъ случаѣ и полстопа пирамиды опредѣляется меньше нежели должно

460. ТЕОРЕМА. Толстога прѣмага отрѣзнаго конуса $abdc$, равна произведенію изъ суммы площадей двухъ круговъ ab и cd съ среднею геометрическою площадью между сихъ круговъ, одною третью оси ik умноженной.

Доказ. Продолжи бокъ ac и ось ik , кои взаимно пересѣкутся въ точкѣ h , проведи cm параллельно боку db , будущъ треугольники act , abh и cdh подобны; чего ради положи діаметръ $ab = x$, $cd = y$, ось $ik = cf = z$, будещъ $at = x - y : x = z$ и въ высотѣ ih , которая по умноженіи втораго члена

претъ-

претымъ и раздѣля на первой будетъ $\frac{x \times z}{x-y}$;

также $x-y : y = z : \frac{y \times z}{x-y} = kh$. Умножь площадь

круга діаметра ab , то есть $\frac{11x}{14}$ одною претью вы-

соты ih , то есть чрезъ $\frac{x \times z}{(x-y)^3}$, произведеніе $\frac{11x}{14} \times$

$\frac{x \times z}{(x-y)^3} = \frac{11}{14} \times \frac{x \times z}{(x-y)^3}$ будетъ равно подстопѣ ко-

нуса abh ; также умножа площадь круга діаметра

cd , то есть $\frac{11y}{14}$ одною претью высоты kh , то есть

чрезъ $\frac{y \times z}{(x-y)^3}$, произведеніе $\frac{11y}{14} \times \frac{y \times z}{(x-y)^3} = \frac{11}{14} \times \frac{y \times z}{(x-y)^3}$

будетъ равно подстопѣ конуса cdh ; которую вы-

чтя изъ перваго, останется подстопа ошрѣзнаго

конуса $abdc = \frac{11}{14} \times \frac{x \times z}{(x-y)^3} - \frac{11}{14} \times \frac{y \times z}{(x-y)^3} = \frac{11}{14} \times$

$\frac{x-y}{x-y} \times \frac{z}{3}$; по предъидущей же теоремѣ $\frac{x-y}{x-y} \times \frac{z}{3}$

$= (x + x.y + y) \times \frac{z}{3}$, по сему $\frac{11}{14} \times \frac{x-y}{x-y} \times \frac{z}{3} =$

$\frac{11}{14} (x + x.y + y) \times \frac{z}{3} = (\frac{11x}{14} + \frac{11xy}{14} + \frac{11y}{14}) \times \frac{z}{3} =$

подстопѣ конуса $abdc$; но $\frac{11xy}{14}$ есть средняя гео-

метрическая площадь между двухъ круговъ

$\frac{11x}{14}$ и $\frac{11y}{14}$ (456); слѣдовательно подстопа ошрѣз-

наго конуса $abdc =$ произведенію изъ суммы пло-

щадей двухъ круговъ ab и cd съ среднею геоме-

трическою площадью между тѣхъ же круговъ на

одну претъ высоты ik .

461. ЗАДАЧА. Въ прямомъ отрѣзномъ конусѣ $abcd$, по известнымъ діаметрамъ меньшаго $cd=20'$, большаго $ab=50'$ и высотѣ $ki=180'$, сыскать онаго толстоту.

Рѣшен. Продолжи ось ik и бокъ ac конуса $abcd$ пока пересѣкутся въ точкѣ h , проведи cf параллельно оси ik и cm параллельно db . Діаметръ cd вычпи изъ ab , останется am . Для подобныхъ треугольниковъ asm , abh и cdh сдѣлай посылку, какъ разность am содержится къ высотѣ cf , такъ діаметръ ab къ высотѣ hi ; также $am : cf = cd : hi$, попомъ сыщи толстоту конуса abh , и толстоту конуса cdh (454); вычтя послѣднюю изъ первой толстоты, получишь требуемую толстоту отрѣзнаго конуса $abcd$.

Или по известнымъ діаметрамъ cd и ab сыщи среднюю геометрическую площадь между двухъ круговъ, сложи оныя площади вмѣстѣ, умножь сумму сихъ плоскостей одною претью оси ki , произведеніе будетъ равно толстотѣ отрѣзнаго конуса $abcd$.

Числами.

$$50' = ab \qquad 180' = ki = cf.$$

$$20' = cd = mb.$$

$$30' = am.$$

am

$$am : cf = ab : hi.$$

$$30' : 180' = 50' : 300' = hi. \frac{200}{3} = 100' = \frac{1}{3}hi$$

$$30' : 180' = 20' : 120' = hk. \frac{120}{3} = 40' = \frac{1}{3}hk$$

$$14 : \pi : (50' \times 50') 2500'' : 1964'' = \text{пл.} \text{ } \text{круг. дїа. } ab.$$

$$14 : \pi : (20' \times 20') 400'' : 314'' = \text{пл.} \text{ } \text{круг. дїа. } cd.$$

$$1964'' \times 100' = 196400''' = \text{полсп. кон. } abh.$$

$$314'' \times 40' = 12560''' = \text{полсп. кон. } cdh.$$

$$183840 = \text{полс. опр. кон. } abdc.$$

Или

$$7 : 22 = 50' : 157' = \text{окруж. кр. дїам. } ab$$

$$\frac{20}{2} = 10' = ck. \frac{10}{2} = 5' = \frac{1}{2}ck.$$

$$785 = \text{сред. гео. пло. (456).}$$

$$1964 = \text{пл. кр. дїам. } ab$$

$$314 = \text{пл. кр. дїам. } cd$$

$$3063'' = \text{суммѣ.}$$

$$\frac{180}{3} = 60' = \frac{1}{3}ki$$

$$183780''' = \text{пол. опр. кон. } abdc$$

вѣрнѣе перваго рѣшенія.

462. ТЕОРЕМА. Толстота шара $afbd$, равна произведенію, его поверхности одною третью радіуса ac умноженной.

Доказ. Ибо шаръ можно признавать за ф. пѣло составленное изъ неисчислимаго числа 299.

У 2 равныхъ

равныхъ безмѣрно мѣлкихъ пирамидъ, какъ на прим. sxy , коихъ верьхи сообщаются въ центрѣ шара s , и всякая почка поверхности шара есть основаніе пирамиды *, посему радіусъ шара можно почитать безъ чувствительной погрѣшности общею ихъ высокою : но какъ число сихъ пирамидъ равно числу почекъ составляющихъ поверхность шара ; того ради толстопа онаго равна суммѣ толстопъ всѣхъ тѣхъ пирамидъ, толстопа жѣ каждой изъ сихъ пирамидъ равна произведенію ея основанія одною третью радіуса шара умноженнаго, слѣдовательно и сумма ихъ толстопъ, то есть толстопа шара, равна произведенію изъ суммы ихъ основаній, то есть поверхности шара одною третью радіуса $cy = ac$ умноженной.

Слѣдств. I. Толстопа шара равна произведенію изъ площади большаго круга шара чрезъ двѣ трети діаметра ab . Ибо (положа площадь круга діаметра $di = z$)
поверь-

• Въ разсужденіи правильности сферической фигуры; можно шѣ почки или мнимыя основанія пирамидъ полагать за правильные многоугольники безмѣрно малые, между собою равные, кои должны быть или равносходные треугольники, либо квадраты или шестигульники; ибо только таковыя правильныя многоугольники могутъ имѣть своихъ боковъ по два общими не составляя въ сомкнутой никакой полосы (410).

поверхность шара будетъ $= 4z$ (427), которую умножа чрезъ $\frac{1}{3}d$ или $\frac{1}{3}b$, произведеніе по предъ идущей теоремѣ будетъ $= \frac{4z \times ab}{6} = z \times \frac{2}{3}ab =$ толстотѣ шара.

Слѣдст. II. Толстота шара равна толстотѣ пирамиды или конуса, коего основаніе равно поверхности а высота радиусу шара. Также равна толстотѣ пирамиды или конуса коего основаніе $=$ площади большаго круга, а высота вдвое діаметра шара ab .

Слѣдст. III. Толстота цилиндра *cefd* No.15 около шара описаннаго, кѣ толстотѣ онаго Ф. 333. какъ 3 : 2. Ибо изъ перваго слѣдствія видно что толстота шара $= \frac{2}{3}ab \times z$: но кругъ діаметра $ab =$ кругу діаметра $cd = z$; того ради толстота цилиндра *cefd* $= z \times (df)ab$ (446); слѣдовательно толстота описаннаго цилиндра кѣ толстотѣ шара, какъ $z \times ab : \frac{2}{3}ab \times z = 1 : \frac{2}{3} = 3 : 2$ или 6 : 4 (ариф. 223).

Слѣдст. IV. Изъ послѣдняго слѣдствія видно что толстота шара $= \frac{2}{3}$ описаннаго цилиндра *cefd*.

Слѣдст. V. Толстота шара вдвое толстоты конуса *cdh* имѣющаго основаніе равно площади большаго круга или основанію описаннаго цилиндра, а высоту равну діаметру тогожѣ шара или высотѣ цилиндра *cefd*. Ибо конусъ *cdh* есть одна треть описаннаго цилиндра *cefd*; по сей причинѣ толстота конуса *cdh* кѣ толстотѣ цилиндра *cefd* какъ 1 : 3;

но толстота шара діаметра ab , къ толстотѣ цилиндра cfd какъ 2 : 3, слѣдовательно толстота шара діаметра ab , къ толстотѣ конуса $chd = 2 : 1$ (ариф. 25с).

463. ЗАДАЧА. По діаметру $id = 80'$, сыскать толстоту шара $aibd$.

Рѣшен. По діаметру id сыщи поверь-
ф. хность шара (428), умножь оную чрезъ
299. $\frac{1}{3}$ радіуса cd ; или сыскавъ площадь круга
діаметра id умножь оную двумя претъми
діаметра di , получишь пребуемую тол-
стоту шара, то есть

$$80' \times 80' = 6400'' = id^2$$

$$14 : \pi = 6400'' : 5028'' = \text{плоч. кр. дѣа. } id.$$

$$5028'' \times 4 = 20112'' = \text{поверьх. шара.}$$

$$\frac{80'}{2} = 40' = \frac{1}{2} id. = cd. \frac{40'}{3} = \frac{1}{3} cd.$$

$$20112'' \times \frac{40'}{3} = 268160''' = \text{тол. шар. } aibd.$$

464. ЗАДАЧА. По данной хордѣ $ef = 80'$, радіусу $ze = 50'$; сыскать толстоту (сектора) вырѣзка шара $aizf$

Рѣшен. Раздѣли хорду ef пополамъ. Въ
ф. прямоугольномъ треугольникѣ ezs сыщи
300. sz (147); вычи оную изъ радіуса az ,
получишь высоту as ; потомъ сыскавъ
поверхность отрѣзка шара $eafe$ (430),
умножь оную одною претъю радіуса ez
или az , получишь толстоту вырѣзка ша-
ра $aizf$.

Числами

Числами

$$\frac{80'}{2} = 40' = \frac{1}{2} ef = es.$$

$$50' \times 50' = 2500'' = \overset{-2}{ez}.$$

$$40' \times 40' = 1600'' = \overset{-2}{es}.$$

$$900'' = \overset{-2}{ez} - \overset{-2}{es} = \overset{-2}{sz}$$

$$\sqrt{900''} = 30' = sz. \quad 50' = ez = az$$

$$30' = sz.$$

$$50' \times 2 = 100' = \text{дѣа. } ab. \quad 20' = az - sz = as.$$

$$7 : 22 = 100' : 314' = \text{окру. круг. дѣам } ab.$$

$$\times 20' = as$$

$$6280' = \text{повер. частн. шар. } efa.$$

$$6280'' \times \frac{50'}{8} = 104666''' = \text{полс. вырѣз. } eza.$$

Доказ. Понеже вырѣзокъ шара $efaz$ равно какъ и шаръ состоитъ изъ неисчепнаго числа пирамидъ, коихъ верьхи сходящся въ центрѣ z и основаніе каждой есть почка поверхности части шара, а радиусъ az общая высота сихъ пирамидъ; по сему полстопа вырѣзка шара равна суммѣ полстопъ всѣхъ пирамидъ составляющихъ оное пѣло; но полстопа каждой пирамиды равна произведенію ея основанія одною претью радиуса az умноженного; слѣдовательно сумма сихъ полстопъ, то есть полстопа вырѣзка шара, равна произведенію изъ суммы ихъ основаній, то есть поверхности отрѣзка шара умноженной одною претью радиуса az .

Слѣдств. Изъ сего видно что толстоша вырѣз-
 Ф. на шара \equiv конусу коего площадь основанія \equiv пло-
 301. щади круга діаметра eg , а высота радіусу; ибо
 кругъ $eg \equiv$ поверхности отрѣзка шара.

465. ЗАДАЧА. По известной хордѣ
 $ef = 80'$ и высотѣ $as = 20'$, сыскать
 толстоту отрѣзка шара $aesf$.

Ф. Рѣшен. Хорду ef раздѣли на двѣ рав-
 301. ные части. Въ прямоугольномъ тре-
 угольникѣ ase сыскавши площадь квадра-
 та діогонали ae (144) раздѣли оную
 на высоту as , получишь діаметръ ab , по-
 томъ умножь площадь квадрата линіи
 ae чрезъ 4, произведеніе будетъ равно
 площади квадрата діаметра eg , сдѣлай
 слѣдующую пропорцію; $14 : 11 \equiv eg : k$ въ
 площади круга діаметра ge (261), кото-
 рая будетъ равна поверхности отрѣзка
 шара; умножь сію площадь одною третью
 радіуса az , получишь толстоту вырѣзка
 $aesz$; потомъ вычти высоту as изъ ра-
 діуса az , останется высота sz конуса
 efz ; напоследокъ по известной высотѣ
 sz и діаметру основанія ef , сыскавъ
 толстоту конуса efz (454), вычти
 оную изъ толстоты вырѣзка шара $aesz$,
 останется требуемая толстоша отрѣз-
 ка шара.

Числами

$$80' = 40' = \frac{1}{2}ef = es$$

40'

$$40' \times 40' = 1600'' = es$$

$$20' \times 20' = 400'' = as$$

$$2000'' = as + es = ae$$

$$\frac{2000}{20} = 100' = \frac{ae}{as} = ab.$$

$$2000'' \times 4 = 8000'' = 4ae = ge.$$

$$14 : \pi = 8000' : 6285' = \text{плос. кру. діа. } eg$$

$$= \text{поверх. опрѣз. шар. } aef.$$

$$6285' = \text{поверх. част. шар. } aef.$$

$$50' = az$$

$$3) 314250 (104750''' = \text{полсп. выр. шар. } aezf.$$

$$50' - 20' = 30' = az - as = sz = \text{выс.}$$

$$\text{кон. } efz.$$

$$80' \times 80' = 6400'' = ef$$

$$14 : \pi = 6400'' : 5028'' = \text{пл. кр. діа. } ef.$$

$$5028'' \times \frac{30}{3} = 50280''' = \text{полс. кон. } ezf$$

$$104750''' = \text{полс. вырѣз. } aezf$$

$$50280 = \text{полсп. кон. } ezf$$

$$54470 = \text{полс. опрѣз. шара } aefz.$$

466. ЗАДАЧА. По даннымъ діаметрамъ ab , cd параллельныхъ круговъ и высотъ $ef = ag$, сыскать толстоту части шара $cabdc$.

Рѣшен. и Доказ. Радіусъ ae вычти изъ радіуса ef , останется eg , и $cd - eg = gd$. Въ треугольникѣ agd по известной ag и gd сыщется ad . 302. а въ прямоугольномъ треугольникѣ agc по известной ag и cg найдемся ac (146); потомъ сыщи радіусъ круга ah описаннаго около треугольника acd чрезъ слѣдующую пропорцію; $ag : ad = ac$ къ діаметру ak , которой раздѣля пополамъ частное

будетъ равно радіусу $ah = dh$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ach , по извѣстной ac и ah сыщи hc (147), вычти hc изъ ht , останеся et , $et + ef =$ высотѣ mf . Наконецъ сыскавъ толстоту отрѣзка шара $cabdc$, и толстоту отрѣзка шара $atba$ (465), вычти послѣднюю изъ первой толстоты, останеся требуемая толстота части шара $cabdc$.

467. ЗАДАЧА. По даннымъ діаметрамъ ab , cd и высотѣ fb , сыскать толстоту цилиндра $abfe$ имѣющаго цилиндрическую полость $cdhg$.

Рѣшен. и Доказ. По діаметрамъ ef и gh сыщи площади круговъ ef и gh . Пло-
 348. щадь круга діаметра gh вычти изъ пло-
 Ф. щадь круга діаметра ef , остатокъ бу-
 348. детъ равенъ площади кроны p , умножь
 оную высокою fb получишь требуемую
 толстоту полость имѣющаго цилиндра
 $abfe$ (446).

468. ЗАДАЧА. По данному углу abh , 32 град. радіусу ab вырѣзка круга agh и высотѣ ac , сыскать толстоту вырѣз-
 ка $habdc$ цилиндра $agfc$.

Рѣшен. Сыщи площадь вырѣзка abh
 Ф. круга ag (259), умножь оную высокою ac
 349. получишь требуемую толстоту вырѣзка
 цилиндра $habdc$ (446).

469. ЗАДАЧА. По даннымъ радіусу
 ac меньшаго вырѣзка acd , радіусу ef
 большаго

большаго вырѣзка efg , углу $acd = efg = 40^\circ$ и наклоненному боку ae , сыскать толстоту вырѣзка отрѣзнаго конуса $abke$.

Рѣшен. Продолжи бокъ ea и ось fc , пока взаимно пересѣкутся въ i . Изъ a проводи ah въ параллель оси if , будетъ $eh = ef - hf = ef - ac$, сыщи ah (147). Для подобія треугольниковъ eha , eif и aci сдѣлай слѣдующую пропорцію, $eh : ef = ah$ къ высотѣ if и $eh : ac = ah$ къ высотѣ ic ; потомъ сыщи площадь вырѣзка efg (259), которую умножа одною претью высоты if , получишь толстоту вырѣзка $eifg$ конуса eki ; также сыщи и толстоту вырѣзка $adci$ конуса abi (449), вычти оную изъ толстоты перваго вырѣзка, остатокъ будетъ пребуемая толстота вырѣзка $dacfge$ отрѣзнаго конуса.

Ф.
350.

470. ЗАДАЧА. Изъ середины цилиндра, $abmk$, вырѣзана часть $qefhka$ и часть $refgxc$ отрѣзнаго конуса $cdnx$, коиъ радиусы ae , ce , xf , градусы угла $aeq = kfh$ и высота ef известны, сыскать толстоту оставшагося тѣла $acrqgdxk$.

Рѣшен. Сыщи по (468) толстоту вырѣзка $qefhka$ цилиндра $abmk$, потомъ сыщи толстоту вырѣзка $refgxc$ отрѣзнаго конуса $cdnx$ (469), вычти оную изъ толстоты вырѣзка $qefhka$ получишь желаемое.

Ф.
351.

471. ЗАДАЧА. Изъ середины отрѣзнаго конуса $abih$ вырѣзана часть $gdlmha$ и часть $fdlonc$ цилиндра $sekn$, коихъ радиусы ad , cd и lh , градусы угла $adg = hlm$ и высота al извѣстны, сыскать толстоту оставшагося тѣла $gacfmhn$.

Ф. Рѣшен. Сыщи по (469) толстоту вырѣзка $gdlmha$
352. отрѣзнаго конуса $abih$, потомъ сыщи толстоту вырѣзка $fdlonc$ цилиндра $sekn$ (468), вычти оную изъ толстоты вырѣзка $gdlmha$ по лучишь пребуемую толстоту.

472. ЗАДАЧА. По даннымъ частямъ ab , ad , ef , и $af = fd = ec = eb$ сыскать толстоту призматической пирамиды $abcefd$.

Ф. Рѣшен. Чрезъ точки e и f разрѣжь
353. пирамиду $abcefd$ плоскостями перпендикулярными къ основанію ac , коими отдѣляясь, трехсторонная призма $ghlkef$, копорой основаніе треугольникъ hgf или lke , а высота ef , и двѣ равныя пирамиды $ahgfd$ и $lbcek$, коихъ основанія равныя прямоугольники ag и lc , а высота $fn = em$. И такъ для разрѣшенія пребуемаго, сыщи высоту fg или fh прапещи $dcef$ или $abef$ (160), потомъ по извѣстнымъ бокамъ (hg) ad , $hf = fg$ равнобедреннаго треугольника hfg сыскавъ площадь (154) умножь оную высотой ef или gk , произведение будетъ равно толстотѣ призмы $ghlkef$ (447), вычти ef изъ dc останеся $dg + kc$. Сей остатокъ

остатокъ раздѣли на двѣ равныя части, частное будетъ $= dg = kc$: но какъ треугольника hfg или lek сысканная высота fn или em есть высота пирамиды $ahgfd$ или $lbcek$, то по известнымъ ab и hg основанія ag и высотѣ fn , сыщи полостноту пирамиды $ahgfd$ (453), которая будетъ равна полостнотѣ пирамиды $lbcek$; и напоследокъ всѣ оныя полостноты сложа вмѣстѣ получишь пребуемую полостноту призматической пирамиды $abcefd$.

473. ЗАДАЧА. По даннымъ частямъ ab , bc , hf , ef и $fb = ah = gd = ec$ параллелограмнаго пруда $hbcfgd$; сыскать число кубическихъ сажень бынutoй земли.

Рѣшен. Представь себѣ что прудъ разрѣжется плоскостями по линіе ef и gh ф. перпендикулярными къ плоскости $abcd$, то 354. оной разсѣчется на три пѣла, изъ коихъ одно будетъ призма $ikefhmtg$ имѣющая основаніе трапецію $efik$ или $ghmt$ и высоту ge ; а другія два пѣла призматическія пирамиды $cbifek$ и $mt.hgd$, коихъ основанія равныя прямоугольники $bcki$ и $mtda$, а высота каждой равна высотѣ fo или lh трапеціи $ikef$ или $mtgh$. И такъ для изслѣдованія желаемого, будетъ $ab - mi = ab - hf = at + bi$ и $at = ib$. Сыщи въ трапеціи af высоту fi , которая будетъ $= ht = gn = ek$, и по известнымъ бокамъ ki , ef и $if = ke$ сыскавъ площадь

площадь трапеціи $ikef$, умножь высоту ge , произведеніе будетъ равно полстоупу призмы $ikefhgnt$ (445); наконецъ по извѣстнымъ бокамъ bi , bc , $bf = ec$, $if = ek$ посредствомъ предъидущей задачи сыщи полстоупу призматической пирамиды $cbifek$, умножь оную чрезъ 2, получишь полстоупу двухъ равныхъ призматическихъ пирамидъ $cbifek + ntahtgd$; наконецъ сложа всѣ оныя полстоупы вмѣстѣ, получишь пребуемую полстоупу параллелограмнаго пруда $habcefgd$ въ кубическихъ саженьяхъ.

474. ЗАДАЧА. По даннымъ діаметрамъ kf и le , сыскать толстоу круглаго кольца $knfm$.

Рѣшен. Изъ радіуса gf вычти радіусъ ge получишь діаметръ ef . Сыщи площадь круга діаметра ef (256); потомъ сыскавъ окружности круговъ діаметра kf и діаметра le умножь полсуммою сихъ окружностей площадь круга діаметра ef , получишь пребуемую полстоупу кольца.

Доказ. Ежели разрѣжешь кольцо плоскостію перпендикулярною къ его поверхности, то сѣченіе будетъ кругъ ef . И такъ представь себѣ, что ось gf съ имѣющимся на концѣ ея кругомъ ef сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около одного своего конца не подвижно пребывающаго въ точкѣ g ; въ такомъ случаѣ отъ обращенія круга ef , произойдетъ круглое кольцо $knkm$, и во время сего обращенія каждая линія изъ составляющихъ плоскость круга, опишетъ круглую поверхность или безмѣрно тонкой слой кольца: но какъ радіусы сихъ безмѣрно тонкихъ слоевъ одинъ другаго превосходитъ одинакии коли-

количествомъ, слѣдственно составляющъ арифметическую прогрессію: но окружности круговъ содержатся какъ радіусы (248), по сей причинѣ и окружности безмѣрно тонкихъ слоевъ составляющихъ полстопу кольца будуще въ арифметической прогрессіи, изъ коихъ первымъ членомъ окружность круга радіуса ge , а послѣднимъ окружность круга радіуса gf , число жъ сихъ членовъ, то есть число слоевъ равно числу линій опредѣляющихъ площадь круга ef : но полсуммы наружныхъ членовъ умноженная числомъ членовъ, равна суммѣ прогрессіи (ариф. 314); слѣдовательно площадь круга діаметра ef , умноженная полсуммою двухъ окружностей круговъ діаметра kf и діаметра le , равна полстопѣ круглаго кольца $ор$.

Примѣч. Такимъ образомъ сыскивается полстаго всякаго кольца.

475. ТЕОРЕМА. Толстота шара A къ толстотѣ куба діаметра ab , содержитъ какъ окружность большаго круга къ 6 ти діаметрамъ ab ; или по содержанію Архимедову какъ 11 : 21, Цейленову 157 : 300, Мецѣеву 355 : 678.

Доказ. Положимъ что окружность большаго круга $= x$, діаметръ $ab = y$, будещъ полстопы шара равна произведенію изъ поверхности (которая $= x \times y$ § 427) на одну треть радіуса или одну шестую діаметра

Ф.
332.

ab (462), то есть $x \times y \times y = \frac{x \times y}{6}$ Тол-

стопы куба діаметра $ab = y$ (445); того ради полстопы шара A содержится къ полсто-

полстопѣ куба діаметра ab , какъ $\frac{x \times y}{6} : y$,
 а по раздѣленіи послѣднихъ членовъ на y
 будетъ $A : ab = \frac{x}{6} : y = x : 6y$ (ариф. 232),
 то есть полстопта шара A къ полстопѣ
 куба діаметра ab , какъ окружность боль-
 шаго круга x къ 6 пи діаметрамъ; а по
 содержанію Архимедову какъ $22 : 7 \times 6$
 или $22 : 42 = 11 : 21$. Цейленонову какъ
 $314 : 100 \times 6$ или $314 : 600 = 157 : 300$.
 Меціеву $355 : 113 \times 6$ или $355 : 678$ ч. д. н.

476. ЗАДАЧА. По данной толстотѣ
 шара діаметра $ab = 2200''$, сыскать
 онаго діаметръ ab ,

ф. Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцію;
 332. $11 : 21$ такъ полстопта шара A къ полс-
 топѣ куба діаметра ab , на конецъ сыс-
 кавъ корень сего куба (ариф. 188), по-
 лучишь діаметръ ab , то есть

$$11 : 21 = 2200''' : 4200'''.$$

$$\sqrt[3]{4200'''} = 16' = \text{діаметру } ab.$$

477. ТЕОРЕМА. Толстоты шаровъ A
 и B , содержатся между собою какъ
 кубы радіусовъ или діаметровъ ab и eq .

Доказ. Положимъ что окружность кру-
 га діаметра $ab = x$, а окружность круга
 діаметра $eq = y$: то будетъ $A : ab = \frac{x^3}{6} : \frac{y^3}{6}$
 $= x^3 : y^3$

$\text{— II} : 2\text{I}$ и $\text{B} : \overset{-3}{eq} = \text{y} : \overset{-3}{beq} = \text{II} : 2\text{I}$
 (475); и для равенства содержаній бу-
 дешъ $\text{A} : \text{B} = \overset{-3}{ab} : \overset{-3}{eq}$ или $\overset{-3}{8zb} : \overset{-3}{8qz} =$
 $\overset{-3}{zb} : \overset{-3}{qz}$, то есть полстопы шаровъ
 содержатся между собою какъ кубы ра-
 діусовъ или діаметровъ.

478. ТЕОРЕМА. Толстоны подоб-
 ныхъ призмъ aed и fli , содержатся
 между собою какъ кубы сходствен-
 ныхъ боковъ.

Доказ. Положимъ призмъ aed пло-
 щадь основанія $acd = x$, призмъ fli No16
 площадь основанія $fhi = y$, для подобія ф.
 призмъ будетъ $ag : mf = ac : fh$ (432), 356
 также $x : y = \overset{-2}{ac} : \overset{-2}{fh}$ (265), а умножа 357.
 члены сей пропорціи чрезъ члены первой
 пропорціи, будетъ $x \times ag : y \times mf =$
 $\overset{-3}{ac} : \overset{-3}{fh}$ или $\overset{-3}{ag} : \overset{-3}{mf}$ (ариф. 245); то
 есть полстопа призмъ acd къ пол-
 стопѣ призмъ $fli = \overset{-3}{ac} : \overset{-3}{fh}$ или $\overset{-3}{ag} : \overset{-3}{mf}$.

Слѣдст. I. Толстопа подобныхъ ци-
 линдровъ ak и lin , содержатся между со- No14
 бою какъ кубы сходственныхъ боковъ; ибо ф.
 подобные цилиндры ничто иное какъ 328
 подобные призмъ имѣющія безмѣрное чи- 329.
 сло сторонъ коихъ основанія сумъ круги.

Часть II

Ф

Слѣдст.

№16 **Слѣдст. II.** Толстоты подобныхъ
 ф. пирамидъ $abcd$ и $fkhi$ и подобныхъ кону-
 356 совъ abc и def , содержащихся какъ кубы
 357. сходственныхъ измѣреній; ибо подобныя
 пирамиды суть $= \frac{1}{3}$ своихъ призмъ aed и
 №14 fhi ; также и подобныя конусы $= \frac{1}{3}$ подо-
 228 бныхъ цилиндровъ ak и dm ; но одинакія
 329 части своихъ цѣлыхъ содержащихся между
 собою какъ ихъ цѣлыя: слѣдственно и
 толстоты пирамидъ какъ кубы сходствен-
 ныхъ измѣреній, то есть $\frac{1}{3}ag \times x : \frac{1}{3}fm \times y$
 $= ac : fh$ (ариф. 239). или $ab : fk$. Тождъ
 должно разумѣть и оконусахъ abc и def .

479. ЗАДАЧА. По известной толсто-
 тѣ четверосторонной призмы $всѣга =$
 $14000''$ и содержанію высоты ac къ
 боку ab основанія $ag 7 : 4$ сыскать
 высоту ac и бокъ основанія ab .

Рѣшен. Представь себѣ что сдѣлана
 №15 призма msq которой бокъ $то$ основанія
 ф. имѣетъ 4 а высота $ms 7$ равныхъ час-
 345 тей, сыщи оной толстоту (447); но
 358. толстоты подобныхъ призмъ содержатся
 какъ кубы сходственныхъ боковъ, того
 ради сдѣлай слѣдующую пропорцію: толс-
 тота призмы msq къ толстотѣ данной
 $всѣга$ какъ $то$ къ ab ; сыщи корень сего
 куба получишь бокъ ab , наконецъ сдѣлай
 посылку $4 : 7 = ab : \text{къ} \text{высотѣ} \text{ } ac$ по
 положенію.

Числами

Числами

$$mo = 4. ms = 7. 4 \times 4 = 16 = mo = \text{пл. основ.}$$

$$4 \times 4 \times 4 = 64 = mo. \quad \times 7 = ms$$

$$112 = \text{пол. приз. } osq.$$

$$112 : 14000'' = 64 : 8000'' = ab.$$

$$4 : 7 = 20 : 35 = ac. \quad \sqrt[3]{8000} = 20' = ab.$$

480. ЗАДАЧА. По данной толстотѣ конуса ahb и содержанію высоты hn къ діаметру основанія ab 9 : 5, сыскать высоту hn и діаметръ ab .

Рѣшен. Толстоту конуса ahb умножь ф. чрезъ 3 получишь толстоту цилиндра 345 . $abdc$, потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію какъ 11 : 14 такъ толстопа цилиндра $abdc$ къ толстотѣ призмы bce (443) : копорой содержаніе высоты $ac = hn$ къ боку ab будетъ такое жѣ какое и цилиндра или конуса ahb ; и такъ по извѣстной толстотѣ призмы и содержанію высоты къ боку основанія, по предѣидущей задачѣ сыщется діаметръ ab и высота $ac = hn$.

Слѣдст. Изъ сего явно, что посредствомъ сихъ двухъ предложеній, легко можно по данной толстотѣ и содержанію сходственныхъ измѣреній, сыскивать прочихъ призмъ и пирамидъ желаемыя части.

481. ТЕОРЕМА. толстота шара $ahbm$ діаметра ab , къ толстотѣ описаннаго около его равнобочнаго конуса qgr какъ 4 : 9.

ф. 333. **Доказ.** Понеже площадь круга qr основанія конуса вшрое больше площади большаго круга діаметра ab (по доказательствѣ 3439) и радіусъ $om = \frac{1}{2}oq = \frac{1}{2}os$; посему радіусъ om шара $ahbm$ есть $\frac{1}{3}$ вышины ms конуса qgr ; и такъ положимъ $om = x$, площадь большаго круга шара діаметра $ab = y$, тогда будетъ $3y =$ основанію конуса qr , $3x =$ вышины ms , полстота конуса $= 3y \times x = 3x \times y$ (452), полстота шара $= 4y \times \frac{x}{3} = \frac{4x \times y}{3}$ (462); того ради полстота шара $ahbm$ къ полстотѣ конуса qrs , то есть $\frac{4x \times y}{3} : 3x \times y = \frac{4}{3} : 3 = 4 : 9$ (ариф. 239. 233)

Слѣдств. Изъ сего и (462) явствуетъ, что полстоты, шара $ahbm$, цилиндра $cdfe$ и конуса qrs около онаго описанныхъ; содержащихся между собою какъ $\frac{4}{3} : 6 : 9$, то есть, содержащихся между собою какъ ихъ поверхностей.

482. ЗАДАЧА. Сыскать діаметръ шара, равнаго толстотѣ тѣла A окружающагося кривою поверхностью.

Рѣшен. Положи данное тѣло A въ ф. 359 параллелопипедической или цилиндрической фигуры

фигуры пустой сосудъ, какъ здѣсь положенъ въ цилиндрѣ ac ; налей въ сосудъ воды или насыпь мелкаго песку, что бы тѣло водою или пескомъ нѣсколько покрылось; ежели песокъ, то сравняй сверьху, что бы его поверхность ef параллельна была основанію цилиндра; и смѣрй по геометрическому маастъ-шпабу высоту ae до которой насыпано песку или налило воды. Потомъ вынь тѣло вонъ и дай песку съ сыпаться или водѣ скапаться, и по сравненіи песка, или по спеченіи воды смѣрй высоту ag осевшаго песку или воды, вычти ag изъ ae останеся высота eg , цилиндра gf , котораго толстопы равна толстопѣ тѣла A . Ибо по вынятіи изъ воды тѣла, столько верхняя плоскость ef воды или песку въ низъ опустилася, сколько мѣста занимаеиъ неправильное тѣло A ; и такъ по извѣстной высотѣ eg , діаметру gh основанія цилиндра gf сыщи толстопу онаго (448); которая будетъ равна толстопѣ неправильнаго тѣла A . Потомъ представь себѣ толстопу цилиндра gf за толстопу точно круглаго шара, по толстопѣ коего сыщется требуемой діаметръ шара (476);

Примѣч. Ежели потребуется сыскашь толстопу такого тѣла, котораго съ мѣста снятъ не можно, какъ на прим. спатуи или прочихъ подобныхъ сему тѣла; то сдѣлай около сего ящикъ въ коемъ бы песокъ держался могъ. Потомъ сдѣлай сосудъ которой бы содержалъ въ себѣ мѣру кубическаго фута; симъ сосудомъ насыпай ящикъ мелкимъ пескомъ а припомѣ

считай сколько кубическихъ фузовъ песку всыпано будетъ, чтобъ песокъ выше спашуи параллельно основанію находился. Наконецъ сыскаеъ толстоту въ кубическихъ фузахъ сдѣланнаго около спашуи ящика (447); вычти изъ оной число кубическихъ фузовъ всыпаннаго песку, останется толстота спашуи.

Ф. 483. Опредѣлен. Ежели Половина эллипсиса
360 *acb* или *cbd* сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около своей
361 оси *ab* или *cd*; то произшедшее отъ сего тѣло,
362. называется эллипсоидъ или овалъ.

484. ЗАДАЧА. По данной большой оси *ab*
 $= 180''$ и меньшей *cd* $= 140''$; сыскать
толстоту эллисоида (овала).

Ф. Рѣшен. Сыщи площадь круга меньшей оси *cd*
361. (256), умножь оную чрезъ $\frac{2}{3}$ оси *ab* получишь толстоту
эллисоида *abcd*.

Числами

$$\begin{array}{r}
 140'' \times 140'' = 19600''^2 = cd \\
 14 : \pi = 19600''^2 : 15400''^2 = \text{пл. круг. дѣа. } cd. \\
 180'' \times \frac{2}{3} = 120'' = \frac{2}{3} ab \\
 \hline
 308000 \\
 15400 \\
 \hline
 1848000''^2 = \text{толст. эллисоида}
 \end{array}$$

Доказ. Понеже полупоперешники *ec*, *fl*, *gm*
и проч. составляющіе плоскость полуэллипсиса *acb*,
при обращеніи онаго около своей оси *ab* опишутъ
круги, коихъ число будетъ равно числу точекъ
составляющихъ ось *ab* полуэллипсиса *acb*, слѣдствен-
но несчетное число сихъ круговъ составятъ тол-
стоту эллисоида *abcd*; также и сходственные по-
лупоперешники *eh*, *fi*, *gk* и проч. опредѣляющіе
плос-

плоскость полукруга ahb , опишутъ такое жѣ количество круговъ составляющихъ полстоу шара $ahbn$, полуноперешники жѣ ce , fl , gm и проч. эллипсиса $abcd$ содержащяся какъ полуноперешники eh , fi , gk , и проч. круга $ahbn$, то есть $ec : eh =$

$$fl : fi = gm : gk \text{ и проч. (277), по сему } \overset{-2}{ec} : \overset{-2}{eh} =$$

$$\overset{-2}{fl} : \overset{-2}{fi} = \overset{-2}{gm} : \overset{-2}{gk} \text{ и проч. (ариф. 245); но площади}$$

круговъ содержатся между собою какъ квадраты радиусовъ, по сей причинѣ (положимъ площадь круга радиуса $ec = x$, $fl = y$, $gm = z$, и проч. площадь круга радиуса $eh = v$, $if = q$, $gk = r$

$$\text{и проч.) будетъ } x : v = \overset{-2}{ec} : \overset{-2}{eh}, y : q = \overset{-2}{fl} : \overset{-2}{fi},$$

$$z : r = \overset{-2}{gm} : \overset{-2}{gk} \text{ и проч. и для равенства содержаній } x : v$$

$$= y : q = z : r \text{ и проч. посему } x + y + z \text{ и проч. } v + q + r \text{ и проч. } = x : v \text{ (ариф. 241); а умножа члены}$$

перваго содержанія чрезъ 2, члены втораго со-

$$\text{держанія чрезъ } \frac{2}{3}ab, \text{ будетъ } (x + y + z \text{ и проч.}) \times 2 :$$

$$(v + q + r \text{ и проч.}) \times 2 = \frac{2}{3}ab \times x : \frac{2}{3}ab \times v$$

$$\text{(ариф. 235); но } (v + q + r \text{ и проч.}) \times 2 = \text{сум-}$$

$$\text{мѣ круговъ составляющихъ полстоу шара } ahbn =$$

$$\frac{2}{3}ab \times v \text{ (462), посему и сумма круговъ } (x + y$$

$$+ z + \text{и проч.}) \times 2 \text{ составляющихъ полстоу элли-}$$

$$\text{псоида } abd = \frac{2}{3}ab \times x \text{ (ариф. 248), то есть пол-}$$

$$\text{стоша эллипсоида равна произведенію изъ площади}$$

$$\text{круга } x \text{ меньшей оси } cd \text{ и двухъ третей большой}$$

$$\text{оси } ab. \text{ Примѣч. Для сысканія полстошты Эллипсоида}$$

$$abcd \text{ произходящаго отъ обращенія около меньшей}$$

$$\text{оси } cd, \text{ должно множить площадь круга большой}$$

$$\text{оси } ab \text{ чрезъ двѣ трети меньшей оси } cd. \text{ ф. 362.}$$

485. ЗАДАЧА. сдѣлать Пифометриче-
скую трость, посредствомъ которой

Ф 3 сис-

сыскивается число ведръ или кружекъ въ какомъ нибудь цилиндрическомъ сосудѣ жидкаго тѣла; на прим. лива, вина и проч.

- Ф. 363. Рѣшен. Прежде всего надлежитъ сыскашь по приложенной при семъ таблицѣ * діаметръ ab основанія, и высоту ac цилиндра cb , въ которой бы входило жидкой матеріи на прим. ведро или кружка слѣдующимъ образомъ: возьми изъ таблицы число кубическихъ дюймовъ ведра или кружки, составляющихъ полстопу цилиндра $abcd$, коего діаметръ ab къ высотѣ ac долженъ содержаться на прим. какъ 3 : 2, сыщи онаго по § 480 діаметръ ab и высоту ac ; попомъ на концѣ произвольно проведенной линіи ac поставь перпендикуляръ $ab =$ діаметру cd , опредѣли $ai = ab$, проведи bi , которая будетъ $=$ діаметру двойной мѣры одинакой высоты съ первою; перенеси bi , на $a2$, будетъ $b2 = a3$ діаметръ тройной мѣры тойже высоты. Подобнымъ образомъ найдутся діа-

Ф.
364.

Мѣра употребляемая при измѣреніи жидкихъ тѣлъ.	Россійск. кубическ. дюймовъ.
кружка или осмуха содержитъ въ себѣ	94. 319'''
четверть - - - - -	188. 638'''
полведро - - - - -	377. 276'''
ведро - - - - -	754. 552'''

дѣаметры $a4$, $a5$, $a6$, $a7$ и проч. наконецъ взявъ сдѣланной изъ крѣпкаго дерева брусокъ ac , на одну его сторону перенеси всѣ пѣ раздѣленія $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, и проч. означь оныя числами 1, 2, 3, 4, и проч. а на другой его бокъ перенеси высоту ab цилиндра $aldc$ столько разъ, сколько оныхъ на брускъ помѣститься можетъ, и оныя также означь числами, получишь желаемую пифометрическую простъ.

Доказ. Извѣстно (144) что $\overset{-2}{ab} + \overset{-2}{a1} = \overset{-2}{b1}$,
 линѣя жъ $\overset{-2}{ab} = \overset{-2}{a1}$, то будетъ $\overset{-2}{b1} = \overset{-2}{a2}$ вдвое
 больше $\overset{-2}{ab}$; равнымъ образомъ $\overset{-2}{b2} = \overset{-2}{a3}$
 вътрое больше $\overset{-2}{ab}$, и квадрапъ линѣи $\overset{-2}{b3}$
 $= \overset{-2}{a4}$ вчетверо больше $\overset{-2}{ab}$, и такъ далѣе:
 но круги содержатся между собою какъ
 квадраты дѣаметровъ (266); погю ради $a2$
 есть дѣаметръ двойнаго круга, $a3$ дѣа-
 метръ тройнаго, $a4$ дѣаметръ четвернаго
 и проч. полспоша жъ цилиндровъ одной
 высоты и такой какъ мѣра $aldc$, содер-
 жатся какъ круги ихъ основаній (443);
 и такъ когда линѣя $\overset{-2}{ab} = \overset{-2}{a1}$ есть дѣа-
 метръ круга одномѣрнаго сосуда, то бу-
 детъ $a2$ дѣаметръ круга двумѣрнаго со-
 суда, $a3$ дѣаметръ основанія сосуда въ три
 мѣры и такъ далѣе, слѣдовательно ежели
 простъ пою спороною на которой назна-
 чены дѣаметры, приложишь къ дѣаметру
 даннаго цилиндрическаго сосуда, то будетъ

извѣстно сколько надобно мѣрѣ $abcd$ чѣмбѣ налить его до шѣхѣ мѣстѣ какѣ высока мѣра $abcd$; потомѣ приложѣ простѣ къ длинѣ даннаго сосуда другою его стороною на которой высота db мѣры назначена, найденное на оной число умножь діаметромѣ вымѣреннаго основанія, получишь число мѣрѣ въ данной сосудѣ входящее.

486. ЗАДАЧА. Сыскать толстоту бочки $abhg$ и узнать сколько въ оную входитѣ данной величины мѣрѣ.

Рѣшен. Вымѣряя посредствомѣ дюймовѣ **ф.** длину бочки ef , и діаметрѣ дна ab , такожде и діаметрѣ cd у впулки гдѣ обыкновенно ширѣ бываетѣ: но какѣ бочка отѣ жерла на обѣ стороны дѣлается уже, то можно ея почестѣ (какѣ опыты уверяютѣ, хотя геометрически доказать и не можно) за цилиндрѣ котораго основаніе есть кругѣ равной полсуммѣ круговѣ ab и cd . И пакѣ по извѣстнымѣ діаметрамѣ ab и cd сыщи площади круговѣ (256); полсуммы сихѣ площадей умножь длиною бочки ef , получишь толстоту онѣ въ кубическихѣ дюймахѣ; число сихѣ дюймовѣ раздѣли на число кубическихѣ дюймовѣ соспавляющихѣ толстоту ведра или кружки, получишь число ведрѣ или кружекѣ въ бочку входящее.

Числами

Числами.

положимъ на при. $ab = 36''$. $cd = 44''$.
 $ef = 90''$

будетъ площадь круга $ab = 1018''$. 28.

площадь круга $cd = 1521''$. 14. (5256)

сумма ихъ $= 2539''$. 42.

$\frac{2539'' \cdot 42}{2} = 1269''$. 71 $=$ полсуммѣ круговъ
 основанія цилиндра полспотою равнаго
 бочкѣ.

$1269''$. 71 \times $90'' = 11427''$. 390 $=$ полспотѣ
 бочки.

$754''$. 552 $=$ полспотѣ вѣдра (485).

$754''$. 552) $11427''$. 390 (15. вѣдр. 1 круж. $=$
 числу вѣдрѣ и проч. содержащихся въ бочкѣ.

Рѣшен. Второе, посредствомъ лифометрической трости.

Возьми лифометрическую трость и пою
 ея спороною на копорой назначены по пере-
 шники ведра или кружки, вымѣряй діа-
 метръ дна ab и средней діаметрѣ cd у
 впулки, потомъ оныя діаметры ab и cd
 сложа въ одну сумму раздѣли по поламъ,
 получишь основаніе цилиндра полспотою
 равнаго бочкѣ; на послѣдокъ другою спо-
 роною лифометрической трости, на копорой
 назначены высоты ведра или кружки, вы-
 мѣряй длину бочки ef , умножь оную пол-
 суммою круговъ ab и cd произведеніе по-
 кажетъ число ведръ или кружекъ, копо-
 рыя содержащяся въ цѣлой бочкѣ.

Поло-

Положимъ на при. $ab = 9$. $cd = 13$, будешъ сумма ихъ $= 9 + 13 = 22$. $\frac{22^2}{2} = 11 =$ полсуммъ круговъ ab и cd . $ef = 16$. $11 \times 16 = 176 =$ числу мѣрѣ.

Примѣч. Ежели должно будешъ сыскашь число мѣрѣ не полной бочки, то надлежишъ оную поспавишь дномъ къ верьху и смѣряшъ діаметрѣ круга у поверхьности жидкаго шѣла и діаметрѣ дна бочки, также и высоту; потомъ сыскашь число мѣрѣ вышепредложеннымъ образомъ

О ИЗМѢРЕНІИ ТОЛСТОТЫ ПЯТИ ПРАВИЛЬНЫХЪ ТѢЛЪ.

487. ТЕОРЕМА. Толстота всякого правильного тѣла, разна произведенію изъ его поверхности чрезъ $\frac{1}{3}$ перпендикуляра изъ центра тѣла на одну его сторону или грань опущеннаго.

ф.

303

304

305

307.

Доказ. Понеже около всякаго правильного шѣла опишется шарѣ, и когда изъ центра онаго ко всѣмъ угламъ проведенъ линіи, то естъ радіусы шара, то оное тѣло раздѣлится на столько равныхъ пирамидъ сколько оно сторонъ имѣетъ (396); поелику основаніи ихъ суть равныя спороны ограничивающія шѣло, а высоты суть равныя перпендикуляры изъ центра на каждую сторону или основаніе пирамиды опущенные, то сему оныя пирамиды равны между собою (450); но толстота каждой пирамиды равна произведенію изъ основанія и одной шрети высоты, слѣдовательно толстота всѣхъ пирамидъ составляющихъ толстоту шѣла равна произведенію суммы

суммы оснований или поверхности шѣла умноженной одною прѣпью общей ихъ высоты.

Для опредѣленія по даннымъ бокамъ въ правильныхъ шѣлахъ высоты каждой пирамиды, слѣдующія предложенія знаютъ надлежимъ.

488. ТЕОРЕМА. Квадратъ бока ae тетраэдра $abde$, содержится къ квадрату діаметра шара eg около онаго описаннаго какъ 2 : 3.

Доказ. Отъ верха e къ центру основанія abd шестраэдра, проводи линію ce , которая будетъ вы- Ф. 366.
сота шестраэдра. И такъ по свойству равносп-
ранныаго треугольника abd , будетъ ad^2 или $ae^2 = 3ac^2$
(205); а въ прямоугольномъ треугольникѣ aec , ae^2
 $= ec^2 + ac^2$, поставъ $3ac^2$ вмѣсто ae^2 , будетъ $3ac^2 =$
 $ec^2 + ac^2$, отъ коихъ отнявъ ac^2 , останется $2ac^2 = ec^2$;
по свойству жъ круга $eagf$ будетъ $ec : ac :: cg$, и
 $ce : ac :: ce : cg$ (181); или $2ac : ac :: ce : cg$, но
 $2ac$ вдвое больше ac , посему $ce = 2cg$ и $eg = 3cg$;
также $eg : ae :: ce$, при чѣмъ и $eg : ae :: eg : ce$
 $= 3cg : 2cg$ или (по раздѣленіи на cg) 3 : 2
(ариф. 140), слѣдовательно $ae : eg = 2 : 3$ (ариф. 218).

489. ТЕОРЕМА. Квадратъ бока ab октаэдра $abcd$, къ квадрату діаметра шара ac , какъ 1 : 2.

Доказ. Понеже какъ видно октаэдръ раз- Ф. 367.
дѣляется на двѣ равныя четвероугольныя пирамиды $afbce$

$afbe$ и $ceadf$, которыхъ общее основаніе есть квадратъ $aecf$, коего діагональ ac равна діаметру шара, и $bd =$ суммѣ высотъ bg и dg оныхъ пирамидъ; но въ прямоугольномъ треугольникѣ acf , $\overline{ac}^2 = \overline{af}^2 + \overline{cf}^2$ или для равенства af и cf , $\overline{ac}^2 = 2\overline{af}^2$ того ради $\overline{af}^2 : \overline{ac}^2$ или $2\overline{af}^2 = 1 : 2$.

490. ТЕОРЕМА. Квадратъ бока ab куба $abdef$, къ квадрату діаметра шара ad какъ $1 : 3$.

Ф. Доказ. Проведи въ квадратѣ $bgdc$ діагональ bd
 368. и въ кубѣ діаметръ ad , будетъ $\overline{bd}^2 = \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2$; но $bg = gd$, по сему $\overline{bd}^2 = 2\overline{bg}^2 = 2\overline{ab}^2$, а для прямоугольнаго треугольника abd , $\overline{ad}^2 = \overline{bd}^2 + \overline{ab}^2 = 2\overline{ab}^2 + \overline{ab}^2 = 3\overline{ab}^2$, слѣдовательно $\overline{ab}^2 : \overline{ad}^2$ или $3\overline{ab}^2 = 1 : 3$.

491. ТЕОРЕМА. Квадратъ діаметра шара, втрое больше квадрата діагонали ab пятиугольника составляющаго сторону додекаедра, въ ономъ шарѣ вписаннаго.

Ф. Доказ. Понеже до декаедръ составляется изъ
 369. 12 пи правильныхъ пятиугольниковъ, слѣдственно оной состоишь изъ 12 равныхъ пирамидъ имѣющихъ верхи въ центрѣ шара около додекаедра описаннаго, коихъ наклоненные бока равны радіусамъ онаго; и такъ смотря на склѣнной изъ бумаги додекаедръ, окажется въ немъ и въ томъ же шарѣ вмѣщенной кубъ $dabc$, котораго каждая сторона есть квадратъ изъ четырехъ діагоналей вмѣстѣ составленныхъ сторонъ додекаедра, какъ $abcd$; но квадратъ бока ab куба, $abcd$, то есть квадратъ діагонали ab каждой стороны додекаедра, къ квадрату діаметра db шара какъ $1 : 3$ (490), слѣдовательно втрое больше квадрата діагонали ab .

492. ТЕОРЕМА. Квадратъ радіуса gb , пятиугольника $cdebf$ сдѣланнаго изъ бока de , икосаедра $ckbphl$ содержится къ квадрату діаметра шара bl описаннаго около икосаедра какъ 1 : 5.

Доказ. Представь себѣ что около основаній двухъ прошивуположенныхъ пятиугольныхъ равныхъ пирамидъ $cdebkf$, и $lsrpho$, описаны круги $anbf$ и $loqr$, коихъ діаметры ab и lq для равенства основаній пирамидъ, равны между собою. Изъ середины n дуги de проводи хорду dn и no , будетъ $dn =$ боку десятиугольника и $no = al$ есть разстояніе двухъ параллельныхъ круговъ $anbf$ и $olqr$; но въ прямоугольномъ треугольникѣ dno или one , $\overline{od}^2 = \overline{on}^2 + \overline{nd}^2$, а понеже $od = de$ есть бокъ пятиугольника, а dn бокъ десятиугольника одного круга, посему $no = al =$ боку шестиугольника (215) = радіусу bg того же круга $anbf$, наконецъ въ прямоугольномъ треугольникѣ abl , $\overline{bl}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{al}^2$; но $ab = 2bg = 2al$, того ради $\overline{bl}^2 = 4\overline{bg}^2 + \overline{bg}^2 = 5\overline{bg}^2$ слѣдовательно $\overline{bg}^2 : \overline{bl}^2$ или $5\overline{bg}^2 = 1 : 5$.

Слѣдств. I. Изъ сего видно, что квадратъ, діаметра bl шара описаннаго около икосаедра, равенъ суммѣ квадратовъ діогонали df съ квадратомъ бока de пятиугольника $cdebf$; ибо по (217) $\overline{df}^2 + \overline{de}^2 = 5\overline{bg}^2$; но $5\overline{bg}^2 = \overline{bl}^2$ слѣдственно $\overline{bl}^2 = \overline{df}^2 + \overline{de}^2$.

Слѣдств. II. Діаметръ bl шара, описаннаго около икосаедра, состоитъ изъ двухъ боковъ десятиугольника, и радіуса bg круга $anbf$ описаннаго около пятиугольника сдѣланнаго изъ бока de икосаедра : ибо прошивуположенные пирамиды $cdbk$ и $lsrph$ во всѣхъ частяхъ равны между собою, посему

Ф.
370.

вы-

высота $kg =$ высотѣ hn ; въ прямоугольномъ же треугольникѣ bgk $\overline{bk}^2 = \overline{bg}^2 + \overline{kg}^2$; но $bk = de$ есть бокъ пятиугольника, а bg радиусъ круга $cnbf$ есть бокъ шестигульника, посему $kg = hn =$ боку десятиугольника тогоже круга, шакже въ разсужденіи параллельныхъ круговъ $cnbf$ и $loqs$, по $= mg =$ радиусу bg или ag .

493. ЗАДАЧА. По діаметру шара ab , начертить бока, каждаго изъ пяти правильныхъ тѣлъ, въ ономъ шарѣ нарисованныхъ.

Ф.
371.

Рѣшен. Раздѣли діаметръ шара ab на три равныя части въ g и o , поставь изъ g и центра f перпендикуляры gk и fh , протяни линіи ak , ah , и kb ; раздѣли ak по наружной посредственной пропорціи въ n . на діаметрѣ ab изъ b поставь перпендикуляръ $bc = ab$, протяни cf и bd . Будетъ bk бокъ тетраэдра. ah бокъ октаэдра. ak бокъ куба. bd бокъ и косаэдра. an бокъ додекаэдра.

Доказ. 1 е. Ибо по §172 будетъ $\div ab : bk : bg$, припомъ же $\overline{ab}^2 : \overline{bk}^2 = ab : bg$ (181); но $ab : bg = 3 : 2$, посему $\overline{bk}^2 : \overline{ab}^2 = 2 : 3$; слѣдственно bk есть бокъ тетраэдра (488).

2 е. $\div ab : ah : af$ (172); припомъ же $\overline{ab}^2 : \overline{ah}^2 = ab : af$ или $3 : 1$ (181), посему $\overline{ah}^2 : \overline{ab}^2 = 1 : 2$, (ариф. 218) слѣдственно ah бокъ октаэдра (489).

3 е. $\div ab : ak : ag$ (172) и $\overline{ab}^2 : \overline{ak}^2 = ab : ag$ или $3 : 1$ (181), посему $\overline{ak}^2 : \overline{ab}^2 = 1 : 3$ (ариф. 229), слѣдственно $ak =$ боку куба (490).

4 е. Понеже бокъ куба $ak =$ діогонали пятиугольника составляющаго спороку додекаэдра въ одномъ шарѣ вписаннаго (491); а когда діогональ пятиугольника

ника раздѣлился по наружной посредственной пропорціи, тогда средняя an будетъ \equiv боку того пятиугольника (214); слѣдовательно an есть бокъ додекаедра.

5 е. Изъ точки d опусти перпендикуляръ de , для подобныхъ треугольниковъ fdb и fde и что $bc \equiv 2bf$ будетъ $ed \equiv 2ef$; посему $\overline{fd}^2 = \overline{bf}^2 = \overline{ed}^2 + \overline{ef}^2 = 4\overline{ef}^2 + \overline{ef}^2 = 5\overline{ef}^2$; но $bc \equiv ab \equiv 2bf$, посему $\overline{ab}^2 = 4\overline{bf}^2 = 4\overline{ef}^2$; того ради ed или $4\overline{ef}^2 : \overline{ab}^2$ или $2\overline{ef}^2 = 1 : 5$, слѣдовательно ed есть радиусъ пятиугольника сдѣланнаго изъ бока икосаедра (492); а понеже діаметръ шара ab состоитъ изъ двухъ боковъ десятиугольника и радиуса круга de описаннаго около пятиугольника сдѣланнаго на бокѣ икосаедра; по сей причинѣ радиусъ bf онаго шара $\equiv \frac{1}{2}$ радиуса de съ бокомъ десятиугольника: но $ef \equiv \frac{1}{2}$ радиуса de или pe , посему be есть бокъ десятиугольника круга радиуса de (213); но $\overline{ed}^2 + \overline{be}^2 = \overline{bd}^2$, слѣдовательно bd есть бокъ пятиугольника въ томъ же кругѣ вписаннаго (215); то есть \equiv боку икосаедра.

Напоследокъ положи діаметръ ab шара $\equiv 1000'$; бока правильныхъ тѣлъ сыщущя слѣдующимъ образомъ:

Іе. Сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ 3 : 2 такъ квадратъ діаметра ab , будетъ содержаться къ квадрату бока bk тетраэдра, изъ площади сего квадрата извлеки корень, получишь бокъ bk тетраэдра.

то есть

$$1000' \times 1000' = 1000000'' = \overline{ab}^2$$

$$3 : 2 = 1000000'' : 666666'' = \overline{bk}^2$$

$$\sqrt{666666''} = 816' = bk = \text{боку тетраэдра.}$$

2е. Сдѣлай посылку какъ 2 : 1 такъ квадратъ діаметра ab , будетъ содержаться къ квадрату бока ah октаэдра, квадратной корень сего числа, будетъ = боку ah октаэдра.

$$1000' \times 1000' = 1000000'' = ab^{+2}$$

$$2 : 1 = 1000000'' : 500000'' = ah^{+2}$$

$$\sqrt[2]{500000''} = 707' = \text{боку октаэдра } ah.$$

3е. Площадь квадрата діаметра шара ab раздѣли на три равныя части. изъ претѣй части сыщи квадратной корень, получишь бокъ куба ak .

то есть $^{+2}$

$$1000' \times 1000' = 1000000'' = ab^{+2}$$

$$\frac{1000000}{3} = 333333'' = ak^{+2}$$

$$\sqrt[3]{333333''} = 577' = \text{боку куба } ak.$$

4е. Поелику бокъ куба ak = дігонали пятиугольника опредѣляющаго спорону додекаэдра; того ради по извѣстной дігонали ak , сыщи бокъ пятиугольника (218), то есть бокъ an додекаэдра; которой будетъ = 357 = an .

5е. Умножь ab квадратно изъ пятой части сего квадрата сыщи корень, которой будетъ = радіусу ed круга описаннаго около пятиугольника, сдѣланнаго на бокъ икосаэдра.

то есть

$$1000 \times 1000 = 1000000'' = ab^{+2}$$

$$\frac{ab^{+2}}{5} = ed^{+2} = \frac{1000000''}{5} = 200000''$$

$$\sqrt{200000} = 447' = de, \text{ попомъ сыщется бокъ пятиугольника радіуса } de \text{ (219), то есть бокъ } bd \text{ и косаэдра, которой будетъ } = 525'. \quad 494.$$

494. ЗАДАЧА. По данному боку додекаэдра $am = 3558''$ сыскать діаметръ шара, въ которомъ упомянутое тѣло влищется

Рѣшен. По известному боку am , сыщи діогональ пятиугольника составляющаго сторону додекаэдра (218); которая будетъ $=$ боку ak куба вписаннаго въ томъ же шарѣ; наконецъ по известному боку ak куба сыщи діаметръ шара ab (493);

Ф.
371.

Числами.

$$3568'' = am,$$

сысканная діогональ пятиугол. $ak = 5774''$
 $=$ боку куба.

$$5774'' \times 5774'' = 33339076''^v = ak^2.$$

$$\times 3$$

$$\frac{33339076''^v}{3} = 11113025''^v = ab^2.$$

$$\sqrt{11113025''^v} = 1054'' = \text{діаметру } ab.$$

Ф.

495. ЗАДАЧА. По известному боку bd икосаэдра $5257''$; сыскать діаметръ шара ab , въ которомъ оное тѣло влищется.

371.

Рѣшен. По данному боку db , сыщи діогональ пятиугольника сдѣланнаго на бокѣ икосаэдра (218), потомъ изъ суммы квадратовъ бока bd , и діогонали пятиугольника, сыщи корень квадрата, получишь желаемое.

по еспѣ

$$5257'' \times 5257'' = 27636049''^v = db^2$$

сысканная діогональ пятиугольника $= 8506''$.

$$8506'' \times 8506'' = 72352036''^v = \text{квдр. діогонали}$$

$$\frac{72352036''^v}{3} = 24117345''^v = ab^2$$

$$\sqrt{24117345''^v} = \text{квдр. діам. } ab.$$

$$\times 2$$

$$\sqrt{99988085''^v}$$

$\sqrt[2]{99988085} = 9999''$, а придавъ къ сему числу вмѣсто оставшейся дроби $1''$ будемъ $= 1000' =$ діаметру ab .

496. ЗАДАЧА. По данному боку ad тетраедра $adbe$, сыскать онаго толстоту.

ф. **Рѣшен.** Понеже тетраедръ ничто иное какъ
366. правильная трехсторонная пирамида. того ради по извѣстнымъ бокамъ сыщется толстота оной (453).

497. ЗАДАЧА: По данному боку $ad = af$ октаедра $afdc b$, сыскать онаго толстоту.

ф. **Рѣшен.** Понеже октаедръ состоитъ изъ двухъ
367. четверосторонныхъ пирамидъ $aecdf$ и $aeibf$, коихъ общее основаніе есть квадратъ $aecf$, и сумма ихъ высотъ $bg + dg = bd =$ діогнали ac квадрата $aecf$, того ради сыскавъ площадь квадрата $aecf$ умножь оную чрезъ $\frac{2}{3} bd$, получишь желаемую толстоту.

498. ЗАДАЧА. По данному боку af , сыскать толстоту куба $abdef$.

ф. **Рѣшен.** Бокъ af умножь кубично, по-
368. лучишь требуемую толстоту куба (445).

499. ЗАДАЧА. По данному боку gf , додекаедра ahg , сыскать онаго толстоту.

№13 ф. **Рѣшен.** Сыщи діаметръ шара описаннаго око-
306. ло додекаедра (494), и радіусъ онаго, который будемъ $=$ наклоненному боку bg пятиугольной пирамиды $fgrb$; попомъ по извѣстному боку fg , сыщи радіусъ fq , правильного пятиугольника rfg . По извѣ-

стному

пному радіусу $f q$ и наклоненному боку $b f$, сыщи высоту $b q$ пирамиды (453); наконецъ сыскавъ поверхность додекаедра умножь оную чрезъ $\frac{1}{3}$ высоты $b q$, получишь желаемую толстоту додекаедра (487).

500. ЗАДАЧА. По данному боку $b c$ и косаедра $a b c e k$; сыскать онаго толстоту.

Рѣшен. По данному боку $b c$, сыщи діаметръ Φ шара и радіусъ $k b = k c$ описаннаго около сего шѣла (495); попомѣ по извѣстнымъ бокамъ $b k$, $k c$, $k h$ 307. и $b c$ сыщи высоту $k m$ трехъ споронной пирамиды $b c k h$ (453); наконецъ сыскавъ поверхность икосаедра умножь оную чрезъ $\frac{1}{3}$ высоты $k m$, получишь желаемую толстоту икосаедра.

Прибавл. Ежели дано будетъ по извѣстному діаметру шара сыскашь толстоту какого нибудь правильнаго шѣла, то оное легко опредѣлится по средствомъ предъидущихъ правилъ; ибо по діаметру шара сыскавъ боки правильнаго шѣла сыщется и толстота онаго.

О ПРЕВРАЩЕНІИ ТѢЛЪ.

501. ЗАДАЧА. Между двухъ данныхъ линій a и b сыскать двѣ среднія пропорціональныя линіи, непрерывной геометрической пропорціи.

Рѣшен. Изъ данныхъ линій a и b , сдѣлай прямоугольникъ $h e$ (70), продолжи $e d$ No.17 и $e g$ не опредѣленно, проводи дігонали Φ $d g$ и $h e$, изъ точки i взаимнаго ихъ пресѣченія описывай круги до шѣхъ поръ, пока при точки c , h и k будутъ въ прямой линіе; при чемъ опредѣлятся пребуемыя 372. X 3 двѣ

двѣ среднія пропорціональныя линіи cd и gk между dh и hg или между a и b .

Доказ. Продолжи ce и ek до f и n . проведи nf : опусти перпендикуляры il и im , коими хорды cf и kn также линіи de и eg раздѣляются на двѣ равныя части въ точкахъ l и m , по сему $dc = ef$ и $en = gk$. Для подобныхъ треугольниковъ cdh и efn будетъ $dh : (ef)cd = cd : (en)gk$, также изъ подобныхъ треугольниковъ efn и gkh , $(ef)cd : gk = (en)gk : gh$; по сей причинѣ $dh : cd = cd : kg = kg : gh$, то есть $\therefore dh : cd : kg : gh$; но $dh = a$, $gh = b$ слѣдовательно cd и gk суть среднія пропорціональныя между a и b .

Другое Рѣшен. По средствомъ мѣд-
 ф. ныхъ прямоугольниковъ. На концѣ про-
 573. веденной линіи $de = b$, поставь перпенди-
 куляръ $dh = a$, продолжи ed и hd не опре-
 дѣленно; потомъ взявъ два мѣдные пря-
 моугольника hcr и pfe соедини оныя
 вмѣстѣ какъ изъ фигуры видно, по-
 томъ положи ихъ на бумагу такъ чтобъ
 внутренней бокъ ch одного находился у
 точки h , а другого наружной бокъ ef у
 точки e подвигай оныя шуды и сюды до
 тѣхъ поръ, пока верьхи прямыхъ уг-
 ловъ прямоугольниковъ, будутъ нахо-
 диться на продолженныхъ линіяхъ hf и
 ec въ точкахъ c и f ; что учиня, опре-
 дѣляясь желаемыя среднія пропорціональ-
 ныя

ныя линѣи, первая dc и вторая df между dh и de или a и b .

Доказ. Ибо треугольники hcf и cfe по рѣшенію прямоугольные; потого ради $hd : cd = cd : df$, также $cd : df = df : de$ (122), слѣдовательно $hd : cd = df : de$, то есть $hd : cd : df : de$.

502. ТЕОРЕМА. Ежели четыре линѣи a , b , c и d въ непрерывной геометрической пропорціи; то квадратъ первой линѣи a , умноженной на послѣднюю d равенъ кубу изъ первой средней b то есть $a \times d = b^3$.

Доказ. Понеже $a : b = c : d$, также и $a : b = b : c$ по положенію; причемъ въ ф. первой пропорціи $a \times d = b \times c$, а во вто-

рой $a \times c = b^2$ (ариф. 222), изъ коихъ первыхъ и вторыхъ часпи умножа между собою

будетъ $a \times d \times c = b^3$ (ариф. 35), а раздѣля оба количества чрезъ c , часпное $a \times d = b^3$; то есть квадратъ первой линѣи a умноженной чрезъ послѣднюю d , равенъ кубу изъ первой средней b .

503. ТЕОРЕМА. Изъ четырехъ линѣй a , b , c и d непрерывной геометрической пропорціи, кубъ первой линѣи a $\times 4$ содержит-

содержится къ кубу второй b , какъ первая линѣя a къ послѣдней d .

Доказ. Ибо для доказательства что $a : b = a : d$ должно быть произведенію крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ; но по предъидущей теоремѣ доказано что $a \times d = b^2$; того ради умножая равныя количества чрезъ a , будетъ $a \times d = b^2 \times a$, то есть произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ; слѣдовательно показанная пропорція справедлива.

504. ЗАДАЧА. Между двухъ данныхъ чиселъ 4 и $13\frac{1}{2}$, сыскать два среднія пропорціональныя числа непрерывной геометрической пропорціи.

Рѣшен. Умножа первое число 4 кубично, сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ содержится 4 : $13\frac{1}{2}$ такъ кубъ перваго числа 64 къ кубу втораго средняго, то есть $4 : 13\frac{1}{2} = 64 : \frac{64 \times 13\frac{1}{2}}{4} = 216$, корень сего куба = 6 есть первое среднее; потомъ умножь первое среднее 6 чрезъ послѣднее $13\frac{1}{2}$, произведеніе $6 \times 13\frac{1}{2} = 81$ будетъ равно квадрату втораго средняго, наконецъ сыщи корень сего квадрата получишь второе среднее число = 9; и такъ будетъ $4 : 6 : 9 : 13\frac{1}{2}$.

505. ЗАДАЧА. Трехстороннюю пирамиду $abcd$ превратить въ призмѣ $fghk$ по основанію abc .

Рѣшен. Сдѣлай основаніе $fgh =$ основанію abc пирамиды, раздѣли высоту ed на три равныя части, сдѣлай высоту mn равну претій части высоты eb пирамиды $abcd$, будетъ призма $fghk$ желаемая. Ф. 375.

Доказ. Понеже полстопта пирамиды равна произведенію изъ основанія acb и одной претии высоты ed ; но основаніе призмы равно основанію пирамиды, и высота mn равна $\frac{1}{3}$ высоты ed пирамиды, того ради и полстопта призмы $fghk =$ полстоптѣ пирамиды $abcd$.

506. ЗАДАЧА. Сдѣлать лятистороннюю призмѣ $fkln$, равну данной четверосторонней пирамидѣ $acbd$, которой бы высота была равна высотѣ данной пирамиды.

Рѣшен. Основаніе ab пирамиды $acbd$ раздѣли на три равныя части (335); претью часть преврати въ правильной пятиугольникѣ fk (315), сдѣлай высоту $on =$ высотѣ de , будетъ призма $fkln$ желаемая. Ф. 376.

Доказ. Чпобѣ доказать сего справедливостъ: то положимъ основаніе ab пирамиды

миды $= x$, высота $de = y = on$, основаніе fk призмы будетъ $= \frac{1}{3} x$, по сему толстота пирамиды $acbd$ будетъ $= \frac{1}{3} x \times y$ (452), а толстота призмы $= \frac{1}{3} x \times y$ (446); но $\frac{1}{3} x \times y = \frac{1}{3} x \times y$, слѣдовательно оныя шѣла толстотою равны.

507. ЗАДАЧА. Превратить цилиндръ ab , въ конусъ по одной высотѣ.

Ф. Рѣшен. Сдѣлай кругъ cd вътрое больше
377. круга ag (330), изъ центра f поспавъ перпендикуляръ $ef = bg$, будетъ конусъ $ced =$ цилиндру ab .

Доказ. Положимъ площадь круга $ag = x$, высота $bg = f = y$, будетъ основаніе $cd = 3x$. Толстота цилиндра $ab = x \times y$ (446), толстота конуса $= 3x \times \frac{1}{3}y = x \times y$, слѣдовательно оныя шѣла толстотою равны.

508. ЗАДАЧА. Сдѣлать трехстороннюю пирамиду fgk , равну четверосторонней призмы $acde$, которой бы основаніе равно было основанію призмы.

Ф. Рѣшен. Основаніе призмы ac преврати въ равносѣсторонній треугольникъ
378. fgl , сдѣлай высоту kh вътрое больше высоты bd , будетъ пирамида $fgk =$ призмы $acde$.

Доказ.

Доказ. Ежели положимъ основаніе призмы $ac = x$, высота $bd = y$, то будетъ основаніе fgl пирамиды $= x$, а высота $kh = \frac{2}{3}y$; толстопа жъ призмы $= x \times y$, а толстопа пирамиды $= x \times \frac{3y}{3} = x \times y$, слѣдовательно оныя шѢла толстопою равны.

509. ЗАДАЧА. Сдѣлать четверостороннюю призму bg равну данному цилиндру ac .

Рѣшен. Основаніе цилиндра ab преврати въ квадратъ ef (318), сдѣлай высоту $fg =$ высотѣ bc цилиндра ac , будетъ призма eg желаемая. ф. 379.

Доказ. Понеже основаніе ab цилиндра ac , равно основанію ef призмы eg , а высота $bc =$ высотѣ fg по рѣшенію; по-то ради оныя шѢла равны между собою (442).

Примѣч. Такимъ же образомъ превращается цилиндръ въ призму трехстороннюю, пятистороннюю и проч.

510. ЗАДАЧА. Сдѣлать кубъ hkm равенъ четверосторонней призмѣ efg .

Рѣшен. Между бокомъ of основанія ef , и высотой fg призмы efg , сыщи двѣ среднія пропорціональныя линіи (501); изъ первой средней, по естѣ изъ меньшей которая $= hk$ сдѣлай кубъ $hkmn$, получишь желаемое. ф. 380.

Доказ.

Доказ. Пусть вторая средняя $= x$, то будетъ $\div :: of : hk : x : fg$ по рѣшенію; и $\overline{-2} of \times fg$ будетъ $= \overline{-3} hk$ (502); но $\overline{-2} of \times fg$ есть полстопоша призмы efg (446), а $\overline{-3} hk =$ полстопошѣ куба $hktn$, слѣдовательно оныя тѣла полстопошою равны.

511. ЗАДАЧА. Цилиндръ bg , котораго діаметръ основанія bf меньше высоты fg ; превратить въ другой коего бы діаметръ основанія равенъ былъ высотѣ.

Рѣшен. Между діаметромъ bf и высотой fg сыщи двѣ среднія пропорціональныя линіи. Изъ первой средней, то есть изъ меньшей которая $= ef$ сдѣлай цилиндръ ed , получишь требуемое.

Доказ. Еслии положимъ что вторая средняя $= x$, то будетъ $\div :: bf : ef = x : fg$, причемъ $\overline{-2} bf \times fg = \overline{-3} ef$ (502); умножь оба количества чрезъ $\frac{11}{14}$, произведеніе $\frac{11}{14} \overline{-2} bf \times fg$ будетъ $= \frac{11}{14} \overline{-2} fe \times fe$; но $\frac{11}{14} \overline{-2} bf$ есть площадь круга діаметра bf , $\frac{11}{14} \overline{-2} ef$ есть площадь круга діаметра ef (261); того ради $\frac{11}{14} \overline{-2} bf \times fg =$ полстопошѣ цилиндра bg , также $\frac{11}{14} \overline{-2} fe \times fe = \frac{11}{14} \overline{-2} fe \times fd =$ полстопошѣ цилиндра ed (446); слѣдовательно оныя тѣла полстопошою равны.

512. ЗАДАЧА. Четверостороннюю призму efd или кубъ, превратить въ другую gik , что бы оной высота была равна данной высотѣ ef .

Рѣшен. КѢ данной высотѣ ef , кѢ высотѣ призмы fd и кѢ боку ae основанія ef , сыщи четвертую пропорціональную ab (108); потомѢ между бокомѢ ae и четвертою пропорціональною ab сыщи среднюю пропорціональную an (172), наконецѢ проведя $gh = an$ начерти квадратѢ gi , взявъ оной за основаніе сдѣлай призму gik , которой бы высота ik была равна данной высотѣ ef , получишь требуемое.

Ф.
382.

Доказ. Понеже $ef : fd = ae : ab$ (103),
также $ae : an = an : ab$ (173); и $ae : an = ae : ab$ (181); посему для равенства содержаній и что $an = gh$ и $ef = ik$ будетѢ $ae : (an) gh = (ef) ik : fd$ (ариф. 218), при чемѢ произведеніе крайнихѢ членовѢ равно произведенію среднихѢ, то есть $ae \times fd = gh \times ik$; но $ae \times fd =$ полстопѢ призмы efd , также $gh \times ik =$ полстопѢ призмы gik , слѣдовательно оныя шѢла полстопною равны.

Слѣдет. I. ТакимѢ образомѢ всякая призма: Ф.
на примѣрѢ шрехсторонная ead по данной высотѣ ef 383.
превращается въ другую gik . Ибо сдѣлавѢ рѣшеніе

нѣ какъ и прежде докажется что $ae : gh = (ef) ik : df$, но площади подобныхъ фигуръ какъ квадраты сходственныхъ боковъ; того ради (положа площадь треугольника $ae f = x$ а площадь треугольника $gh i = y$) $x : y = ae : gh$, и для равенства содержаній $x : y = ik : df$, приче́мъ $x \times df = y \times ik$ (ариф. 218), то есть полстопа призьмы $ea f d =$ полстопа призьмы $gh i k$.

Слѣдст. II. Также превращается всякая пирамида или конусъ въ другую, по какой бы то ни было высотѣ; ибо по предъидущей теоремѣ сывавъ къ данной высотѣ ef , высотѣ rm и къ боку ae основанія, четвертую пропорціональную линію, докажется что $ea \times rm = gh \times pq$, изъ коихъ каж-

дое раздѣля на 3 будетъ $\frac{ea \times rm}{3} = \frac{gh \times pq}{3}$, то есть полстопа четверосторонной пирамиды $ea f m =$ полстопа пирамиды $gh i p$; также изъ перваго слѣдствія видно что $x \times (df) rm = y \times (ik) pq$,

изъ коихъ раздѣливъ каждое на 3 выде́тъ $\frac{x \times rm}{3} = \frac{y \times pq}{3}$, то есть полстопа трехсторонной пирамиды $ea f m =$ полстопа пирамиды $gh i p$.

513. ЗАДАЧА. Четверостороннюю призьму $abcd$ или кубъ, превратить въ другую $gh i k$ по основанію $gi = gh$.

Рѣшен. Къ боку даннаго основанія gh и къ боку ab данной призьмы, сыви прешью пропорціональную линію pr (*) попомъ къ

(*) Слѣдующимъ образомъ на произвольно проведенной линіи sr положи $sn = gh$ изъ точки n поставь

къ боку даннаго основанія $gh = sn$, къ претій пропорціональной np , и къ высотѣ призмы $cd = sq$ сыщи четвертую пропорціональную qr (108); напоследокъ на данномъ основаніи $gi = gh$, сдѣлай призму $ghik$ копорой бы высота ik была равна qr , получишь желаемое.

Доказ. Понеже $sn = gh : (no)ab = (no)ab : np$ по рѣшенію, и $gh : ab = gh : np$ (181); но $sn = gh : np = (sq)cd : qr$ или ik по рѣшенію; посему для равенства содержаній будетъ $gh : ab = cd : ik$, причемъ $gh \times ik = ab \times cd$ (ариф. 222), то есть толсто́та призмы $abcd =$ толсто́тъ призмы $ghik$.

Прибавл. I. Такимъ образомъ всякая призма какъ на прим. пятисторонняя $abcde$, поданному основанію ghi превращается въ другую $ghikl$. Ибо сдѣлавши рѣшеніе какъ и прежде докажется что $gh : ab = cd : ik$; но площади подобныхъ фигуръ содержатся какъ квадраты сходственныхъ боковъ (265); того ради (положа площадь пятиугольника $ac = y$ площадь пятиугольника $gi = z$) $z : y = gh : ab$, и такъ для равенства содержаній будетъ $z : y = ac : ik$, причемъ $y \times cd = z \times ik$, то есть толсто́та призмы $abcde =$ толсто́тъ призмы $ghikl$.

Прибавл.

перпендикуляръ $no = ab$, проведи or , изъ точки o на концѣ линіи or поставь перпендикуляръ op , будетъ np претія пропорціональная; ибо по свойству прямоугольнаго треугольника or , $sn : on : np$ (122).

Ф.
385.

Ф.
386.

Прибавл. II. Тѣмъ же самимъ образомъ, всякая пирамида или конусъ abc , по данному основанію ef превращается въ другой efh . Ибо по предъидущей теоремѣ: сыскавъ къ діаметру основанія ef и къ діаметру основанія ab , третью пропорціональную pr ;

Ф.
384.

попомъ къ діаметру ef , къ третій пропорціональной pr и къ высотѣ cd четвертую пропорціональную $qr = gh$, докажется что $ef^2 : ab^2 = cd : gh$; но площади круговъ содержатся какъ квадраты діаметровъ; и такъ (положа площадь круга діаметра $ab = x$, площадь круга діаметра $ef = y$) будетъ $y : x = ef^2 : ab^2$, и въ разсужденіи равенства содержаній $y : x = cd : gh$, при чемъ $y \times gh = x \times cd$; изъ коихъ раздѣля каждое количество на 3, будетъ $\frac{y \times gh}{3} = \frac{x \times cd}{3}$, то есть полстопа конуса efh . равна полстопѣ конуса abc .

514. ЗАДАЧА. Отрѣзной конусъ $abcd$, превратить въ лятистороннюю пирамиду по данному основанію qrs .

Ф.
387.

Рѣшен. Сдѣлай прямоугольникъ gk , котораго бѣ основаніе gh было равно окружности круга діаметра cd , а высота hk равна $\frac{1}{2}$ радіуса af , попомъ прямоугольникъ gk , кругъ cd , также и кругъ ab превращая каждой въ квадратъ, сложи оныя вмѣстѣ (323); квадратъ равной суммѣ всѣхъ оныхъ плоскостей преврати въ правильной пятиугольникъ lmn , взявъ оной за основаніе сдѣлай пирамиду $lmte$ коюрой бы высота ef была равна высотѣ ef конуса $abcd$ наконецъ по предъидущей задачѣ преврати оную по данному основанію qrs въ другую $qrstv$, получишь желаемое.

Доказ. Прямоугольникъ gk по § 456 есть средняя геометрическая площадь между двухъ оснований cd и ab конуса $abcd$, и сумма сихъ площадей $=$ пятиугольнику lmn по рѣшенію; полстпопа жѢ конуса $abcd =$ произведенію изъ суммы показанныхъ плоскостей, то есть площади пятиугольника lmn чрезъ $\frac{1}{3} ef$ высоты конуса (460), также и полстпопа пятисторонной пирамиды, равна произведенію площади того жѢ пятиугольника lmn чрезъ $\frac{1}{3} ef$ высоты умноженной, того ради онѣя произведенія въ обоихъ случаяхъ равны; слѣдовательно полстпопа конуса $abcd =$ полстпопѢ пирамиды $lmne$, а по рѣшенію (512) $=$ полстпопѢ пирамиды $qrstv$.

Примѣч. Такимъ же образомъ и всякая отрѣзная пирамида превращается въ призмѢ, конусъ или какую пожелаешь пирамиду по данному основанію или высотѢ.

515. ЗАДАЧА. Шаръ x превратить въ кубъ.

Рѣшен. Діаметръ mn раздѣли на 21 часть, сдѣлай $ns =$ иши шѢмъ же частямъ, сыщи между діаметромъ mn и sn двѣ среднія пропорціональныя линіи, изъ первой средней которая равна gh , сдѣлай кубъ $ghikl$ получишь желаемое.

Доказ. Положимъ что вторая средняя ф. $= y$, будетъ $\therefore mn : gh : y : ns$ (501); чего 388.

Часть II

Ц

ради

ради mn или $ab : gh = mn : ns$ или $21 : 11$ (503); но полстопа куба діаметра $mn = abcq$ къ полстопоѣ шара x , какъ $21 : 11$ (475), то есть $ab : x = 21 : 11$, посему для равености содержаній $ab : gh = ab : x$; но $ab = ab$, следовательно $gh = x = ghikl$.

ДРУГИМЪ ОБРАЗОМЪ.

Рѣшен. и Доказ. Около шара x , опиши цилиндръ ac , раздѣли высоту цилиндра ad на три равныя части въ f и r , будетъ цилиндръ $ae = \frac{2}{3}$ цилиндра $ac =$ полстопоѣ шара x . Преврати цилиндръ ae въ четвероспоронную призму (509); а оную въ кубъ $ghikl$ (510), получишь желаемое.

516 ЗАДАЧА. Кубъ ad превратить въ шаръ.

№18 Рѣшен. Бокъ куба ab раздѣли на 11 ф. равныхъ частей, опредѣли $ak = 21$ тѣмъ же частямъ; между ab и ak сыщи двѣ среднія пропорціональныя линіи изъ первой средней gh сдѣлай шаръ z получишь желаемое.

Доказ. Есть ли положимъ что вторая средняя $= y$; то по рѣшенію будетъ $ab : gh : y : ak$, и $ab : gh = ab : ak$ (303) или $11 : 21$; но полстопа шара z къ полстопоѣ куба діаметра gh какъ $11 : 21$ (475), то
есть

есть $z : gh = \pi : 2r$, посему $ab : gh =$
 $z : gh$; но $gh = gh$ слѣдовательно $ab = z =$
 кубу ad .

Рѣшеніе другимъ образомъ.

Сторону куба, то есть квадратъ ac
 преврати въ кругъ lm (319), сдѣлай кругъ np вътрое больше круга lm (330); попомъ Φ .
 между радіусомъ qn упрощеннаго круга np , 390.
 и удвоеннымъ бокомъ ab куба ad , то есть
 $2ab = af$ сыщи двѣ среднія пропорціональ-
 ныя линіи; изъ первой средней gh , сдѣлай
 шаръ z получишь желаемое.

Доказ. Понеже площадь круга діаметра
 $np = 3ab$ по рѣшенію; но $\pi : 14 = 3ab : np$,
 то есть площадь круга діаметра np къ
 квадрату діаметра np (261); того ради
 $\frac{3ab \times 14}{11} = np = pt$, которое раздѣля на
 4, частное $\frac{3ab}{4} \times \frac{14}{11}$ будетъ $= nq = qr$.
 И такъ (положимъ вторая средняя $= y$)
 будетъ $\div nq : gh : y : 2ab$ по рѣшенію, и
 $nq \times 2ab = gh$ (502); а когда на мѣсто
 nq поставиши равное $\frac{3ab}{4} \times \frac{14}{11}$, то будетъ
 $\frac{3ab}{4} \times \frac{14}{11} \times 2ab = \frac{21ab^2}{11} = gh$, изъ коихъ
 каждое количество умножа чрезъ $\frac{11}{21}$, бу-
 детъ $ab = \frac{11}{21} gh$; но $\frac{11}{21} gh =$ толстотнѣ
 Ц 2 шара

шара z (475); слѣдовательно полстопа
шара $z = \overset{-3}{ab}$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякія призмы, цилиндры, пирамиды, конусы и проч. превращая каждую посредствомъ предъидущихъ задачъ въ четверостороннюю призму, потомъ въ кубъ и напоследкомъ въ шаръ превращаться могутъ.

517. ЗАДАЧА. Вырѣзокъ шара $acbd$ превратить въ шаръ.

Рѣшен. Кругъ радіуса ad преврати въ квадратъ gi , взявъ оной за основаніе сдѣлай призму gm , что бы оной высота hk была равна $\frac{1}{3}$ радіуса ac , потомъ призму gm преврати въ кубъ (510), и наконецъ по (516) въ шаръ z , получишь желаемое,

Доказ. Пусть будетъ радіусъ $ac = x$,
ф. площадь круга радіуса $ad = y$, посему
391. площадь квадрата $gi = y$ и $hk = \frac{x}{3}$
по рѣшенію; и такъ будетъ $y \times \frac{x}{3} =$
полстопа части шара abd , также $gi \times hk =$
 $y \times \frac{x}{3} =$ полстопа призмы gm (446);
того ради полстопа вырѣзка шара $acbd =$
полстопа призмы gm , и равна полстопа
шара z по рѣшенію (510) и (516).

О СЛОЖЕНІИ ТѢЛЪ.

518. ЗАДАЧА. Начертить конусъ равенъ двумъ даннымъ abc и def имѣющимъ равныя основанія.

Рѣшен.

Рѣшен. Сдѣлай основаніе конуса kl ф. 392.
равно основанію ab или de , а высоту mn
= суммѣ высотъ $fh + gc$ данныхъ ко-
нусовъ abc и def , получишь желаемое.

Доказ. Положимъ площадь основанія
каждаго изъ данныхъ конусовъ $= x$, высота
 $cg = y$, высота другаго $hf = z$; то площадь
основанія конуса klm будетъ равна x ,
высота $mn = y + z$; того ради будетъ
полснопта конуса перваго $abc = \frac{x \times y}{2}$,
втораго $def = \frac{x \times z}{2}$, полснопта жъ конуса
 $klm = x \times \frac{(y + z)}{2} = \frac{x \times y + x \times z}{2}$ (452),
равна суммѣ полсноптъ конусовъ abc и def .

519. ЗАДАЧА. Начертить призму
равну двумъ даннымъ $defg$ и $hikl$ имѣю-
щимъ высоту c .

Рѣшен. Сдѣлай треугольникъ mnp ра- ф. 393.
венъ $def + hik$, и высоту $po =$ высотѣ
одной изъ данныхъ призмъ, будетъ
призма mro желаемая.

Доказ. Понеже полснопта призмы $defg$
 $= A \times c$ и полснопта призмы $hikl = b \times c$,
также полснопта призмы $mro = (A + b) \times c$
 $= a \times c + b \times c$, то есть = суммѣ
полсноптъ двухъ данныхъ призмъ.

Примѣч. Посредствомъ сихъ двухъ задачъ, скла-
дывающихся конусы, цилиндры, призмы и пирами-
ды равныхъ основаній и высотъ; когда жъ оныя

будутъ неравныѣ, то надлежитъ ихъ превращать по одному основанію или высотѣ, и потомъ поступать какъ показано.

520. ЗАДАЧА. Сдѣлать кубъ, равенъ двумъ не равнымъ кубамъ *тто* и *gbd*.

Рѣшен. Сыщи кѣ боку большаго куба ф. *ab* и меньшаго *тт*, четвертую пропорціональную линію *ah*, которую придай кѣ боку большаго куба *ab*, потомъ между *be* и *bh*, сыщи двѣ среднія пропорціональныя линіи, изъ первой средней сдѣлай кубъ *qpr*, который будетъ = суммѣ кубовъ *тто* и *gbd*.

Доказ. Еслии положимъ что третья пропорціональная равна *t*, то будетъ $\frac{ab}{тт} : t : ah$, при чемъ $ab^2 \times ah$ или $ab^2 \times ah$ $\frac{-2}{-3}$ = $тт^3$, то есть полстопа призмѣ *fahk* = кубу *тто*, посему призма *dbhk* = двумъ кубамъ *bad* + *тто*; а по рѣшенію (510) равна кубу *qpr*, следовательно кубъ *qpr* равенъ двумъ кубамъ *bad* + *тто*.

Примѣч. Такимъ же образомъ складываются шары и всѣ подобныя правильныя и неправильныя тѣла, только вмѣсто боковъ кубовъ, должно употреблять ф. діаметры шаровъ, или бока правильныхъ и неправильныхъ тѣлъ. Ибо полстопа шаровъ также подобныхъ правильныхъ и неправильныхъ тѣлъ содержатся между собою какъ кубы діаметровъ или сходственныхъ боковъ. На прим. ежели дожить шаръ

шарѣ x и y , по кѣ діаметру ab большаго шара y , и кѣ діаметру mn меньшаго x сыщи четвертую пропорціональную линію ah ; и придавъ оную кѣ діаметру ab большаго шара y , сыщи (501) между діаметромъ ab и линіею ah двѣ среднія пропорціональныя линіи, изъ первой средней pq сдѣлай шарѣ z , который будетъ $z = x + y$. Ибо по предъидущей задачѣ докажется что $pq = ab + mn$; а по (477) $y : ab = x : mn = z : pq$; посему $y + x : ab + mn = z : pq$; но $pq = ab + mn$, слѣдовательно $z = y + x$. Тожѣ должно разумѣть и о прочихъ подобныхъ шѣлахъ.

О ВЫЧИТАНІИ ТѢЛЪ

521. ЗАДАЧА. Призму $defg$ вычестъ изъ призмы $mnop$, которыя одной высоты но неравнаго основанія.

Рѣшен. Вычпи основаніе призмы def ф. изъ основанія mnp , оставшую плоскостъ 393. копорая равна hik возми за основаніе, а высоту hl сдѣлай равну высотѣ po , будетъ призма $kihl$ равна разности данныхъ призмъ

Доказ. Положимъ площадь основанія $def = x$, $mnp = y$, высота призмъ $= c$, посему основаніе $hik = y - x$, и шакъ будетъ полстопа призмы $defg = x \times c$, призмы $mnop = y \times c$, а призмы $kihl = (y - x) \times c = y \times c - x \times c =$ разности двухъ данныхъ призмъ $defg$ и $mnop$.

522. ЗАДАЧА. Конусъ abc вычестъ изъ конуса kim , кои одного основанія но неравныхъ высотъ.

ф. 392. Рѣшен. Сдѣлай основаніе конуса de равно основанію ab или kl , а высоту онаго hf равну разности высотъ данныхъ конусовъ, будетъ конусъ def желаемой оспашокъ.

Доказ. Положимъ основаніе каждого конуса $= x$, высота конуса $abc = y$, $kim = z$; по сему высота конуса $def = z - y$, того ради будетъ полнота конуса $abc = \frac{x \times y}{3}$, конуса $kim = \frac{x \times z}{3}$, конуса $def = \frac{(z - y)}{3} \times x = \frac{x \times z - x \times y}{3} =$ разности конусовъ abc и kim .

Примѣч. Такимъ образомъ вычитаются пирамиды изъ пирамидъ, цилиндры изъ цилиндровъ и призмы изъ призмъ, когда оныя имѣютъ равныя основанія или высоты; когда жъ онѣ будутъ не равныхъ, то надлежитъ ихъ превращать по одному основанію или высотѣ, а потомъ съ оными поступать, какъ въ предъидущихъ задахъ показано.

523. ЗАДАЧА. Кубъ $то$ вычестъ изъ куба $асф$.

ф. 395. Рѣшен. Сыщи (109) къ боку большаго куба ab и меньшаго mn , четвертую меньшую пропорціональную линію bg , вычпи оную изъ ab , потомъ сыщи между бокомъ ab или bc и оспашкомъ ag
двѣ

двѣ среднія пропорціональныя линѣи, изъ первой средней qr сдѣлай кубъ qrt , получишь желаемое.

Доказ. Ежели положимъ что прѣпья пропорціональная линѣя $= v$; то будетъ
 $\div bc : mn : v : bg$ (109); причемъ $bc \times bg$
 $= mn$ (502), то есть полстопа призъ-
 мы $ghdc$ $=$ кубу $пто$; посему призъ-
 ма $afhga$ $=$ разности двухъ кубовъ bad
 и $пто$, а по рѣшенію (510) равна кубу
 qrt , слѣдовательно кубъ qrt $=$ разности
 кубовъ bad и $пто$.

Примѣч. Такимъ же образомъ вычисляются шары
 и всѣ подобныя правильныя и неправильныя пѣла;
 причемъ вмѣсто боковъ кубовъ, надлежитъ брать
 діаметры шаровъ, или сходственные бока подобныхъ
 пѣлъ, и поступать какъ въ сей задачѣ показано;
 ибо полстопа шаровъ, также подобныхъ правиль-
 ныхъ и неправильныхъ пѣлъ, содержатся между со-
 бою какъ кубы діаметровъ или сходственныхъ бо-
 ковъ.

О УВЕЛИЧІВАНІИ ТѢЛЪ.

524. ЗАДАЧА. Сдѣлать четверо-
 стороннюю пирамиду втрое больше
 данной acd , по одной высотѣ.

Рѣшен. Начерти квадратъ gi втрое ф.
 больше квадрата ac (330); сдѣлай высоту 396.
 kl пирамиды $ghik$, равну высотѣ ed пира-
 миды $abcd$, получишь требуемое.

Ц Б Доказ.

Доказ. Понеже полстопы пирамидъ одной высоты содержащяся какъ ихъ основанія (448); но основаніе gi впрое больше основанія ac , того ради и полстопа пирамиды $ghik$ впрое больше пирамиды $abcd$.

525. ЗАДАЧА. Сдѣлать конусъ вдва съ четвертью раза больше даннаго abc , что бы былъ одного основанія съ даннымъ.

ф.

397.

Рѣшен. Продолжа cd , опредѣли высоту конуса $de = 2\frac{1}{4} cd$, сдѣлай на основаніи ab , конусъ abe получишь желаемое.

Доказ. Положимъ основаніе $ab = x$, будемъ полстопа конуса $abc = \frac{x \times cd}{3}$, конуса $abe = \frac{x \times ed}{3}$; посему $\frac{x \times cd}{3} : \frac{x \times ed}{3} = cd : ed$ (по раздѣленіи на $\frac{x}{3}$); но ed въ $2\frac{1}{4}$ больше cd , слѣдовательно и полстопа конуса abe въ $2\frac{1}{4}$ раза больше конуса abc .

Примѣч. Такимъ образомъ призмы, цилиндры и всѣ пирамиды увеличиваются.

526. ЗАДАЧА. Данную пирамиду a увеличить вдва съ половиною раза больше, въ параллель основанію ade .

ф.

398.

Рѣшен. Сыщи между бокомъ cd и $2\frac{1}{2}$ онаго, двѣ среднія пропорціональныя линіи (501), сдѣлай bc равну первой средней, проводи

проведи bg , bh и gh въ параллель бокамъ основанія ade , будетъ пирамида z желаемая.

Доказ. Если положимъ что вторая средняя $= y$: то будетъ $\div \div cd : bc = y : 2\frac{1}{2}$
 cd по рѣшенію, а по (503) $cd : bc = cd : 2\frac{1}{2}$
 cd ; но полстошты подобныхъ пѣлѣ какъ кубы сходственныхъ боковъ; того ради $q : z = cd : bc$, и для равности содержаній $q : z = cd : 2\frac{1}{2} cd$; но $2\frac{1}{2} cd$ два съ половиною раза больше cd , слѣдовательно z въ $2\frac{1}{2}$ раза больше q .

Примѣч. Такимъ образомъ всякія пирамиды иконусы во сколько разъ увеличиваются, во сколько попребно будетъ.

527. ЗАДАЧА. Сдѣлать кубъ fek вътрое больше даннаго bad .

Рѣшен. Продолжа ab опредѣли $ag = 3ab$, ф.
 попомъ сыщи между ab и упроеннымъ 399.
 бокомъ ag двѣ среднія пропорціональныя линіи, изъ первой средней ef сдѣлай кубъ fek , которой будетъ вътрое больше даннаго bad .

Доказ. Положа вторую среднюю $= x$, будетъ $\div \div ab : ef : x : ag$ по рѣшенію; а по (503) $ab : ef = ab : ag$, но $ag = 3ab$ слѣдовательно $ef = 3ab$.

528. ЗАДАЧА. Сдѣлать шаръ $у$, чтобъ къ оному данной шаръ $х$ содержался какъ 4 : 9, то есть что бы шаръ $у$ былъ въ $2\frac{1}{4}$ раза болѣе даннаго $х$.

Ф. Рѣшен. Діаметръ ab даннаго шара $х$
400. раздѣли на 4 равныя части, продолжа ab опредѣли $ae = 9$ пи тѣмъ же частямъ; попомъ сыщи между ab и ae двѣ среднія пропорціональныя линіи, изъ первой средней сдѣлай шаръ $у$, получишь желаемое.

Доказ. Пусть вторая средняя $= z$, то будетъ $\div ab : cd : z : ae$, и $ab : cd = ab : ae$ (503); но $x : y = ab : cd$ (477), а для равенства содержаній $x : y = ab : ae$; но $ab : ae = 4 : 9$, слѣдовательно и $x : y = 4 : 9$.

Примѣч. Такимъ образомъ кубы и всѣ правильныя тѣла увеличиваются во столько разъ, сколько потребно будетъ.

О ДѢЛЕНІИ ТѢЛЪ.

529. ЗАДАЧА. Сдѣлать пирамиду $abcd$ втрое меньше данной пирамиды $ghik$, что бы оныя были одной высоты.

Ф. Рѣшен. Раздѣли основаніе gi пирамиды
396. $ghik$ на три равныя части (351), сдѣлай квадратъ $ac = \frac{1}{3} gi$, попомъ взявъ оной за основаніе опредѣли высоту $ed = kl$, будетъ пирамида $abcd = \frac{1}{3}$ пирамиды $ghik$.

Доказ.

Доказ. Понеже полстопы пирамидъ одной высоты, содержащяся какъ ихъ основанія, того ради $ghik : abcd = gi : ac$; но $ac = \frac{1}{3} gi$, слѣдовательно и $abcd = \frac{1}{3}$ пирамиды $ghik$.

530. ЗАДАЧА. Сдѣлать конусъ $abg = \frac{1}{4}$ даннаго конуса abc , что бы оныя были равнаго основанія.

Рѣшен. Раздѣля высоту cd на четыре равныя части, сдѣлай конусъ abg , чтобъ онаго основаніе ab было равно основанію ab даннаго конуса abc , а высота $gh = \frac{1}{4}$ высоты cd , получишь желаемое. Ф.
401.

Доказ. Если ли положимъ что основаніе каждаго конуса $= x$, то будешь полстопы конуса $abc = \frac{x \times cd}{3}$, конуса $abg = \frac{x \times gh}{3}$; того ради $\frac{x \times cd}{3} : \frac{x \times gh}{3} = cd : gh$ (пораздѣленіи на $\frac{x}{3}$); но gh вчетверо меньше cd , слѣдовательно и конусъ abg вчетверо меньше конуса abc .

Примѣч. Такимъ образомъ призмы и цилиндры въ желаемыя части дѣлятся.

531. ЗАДАЧА. Пирамиду esf раздѣлить на три равныя части Плоскостями параллельными основанію aes .

Рѣшен. Раздѣли ef на три равныя части въ m и l , сыщи между ef и mf двѣ среднія пропорціональныя линіи, опредѣли Ф.
402.
 fi

fi равну первой средней, прорѣжѣ изъ i плоскостію ik параллельною основанію eac , будетъ пирамида ikf , шретья часть пирамиды ecf . Потомъ сыщи между ef и fi двѣ среднія пропорціональныя линіи, сдѣлай fg равну первой средней, изъ g прорѣжѣ плоскостію gh параллельно основанію eac , будетъ пирамида $ghf = \frac{2}{3}$ пирамиды ecf ; а остатокъ $abhg = \frac{1}{3}$ пирамиды ecf .

Доказ. Положимъ вторая средняя $= x$, то будетъ $\frac{-3}{-8} ef : fi : x : fm$ по рѣшенію, и $ef : fi = ef : fm$ (503); изъ подобныхъ же пирамидъ $ecf : ikf = \frac{-3}{-8} ef : fi$ (478); посему $ecf : ikf = ef : fm$ (ариф. 218); но $fm = \frac{1}{3} ef$ слѣдовательно пирамида $ikf = \frac{1}{3} ecf$; такимъ же образомъ докажется что пирамида $ghf = \frac{2}{3}$ пирамиды ecf ; того ради часть $ikhg = \frac{1}{3}$ пирамиды ecf , и часть $ghce = \frac{1}{3}$ пирамиды ecf .

532. ЗАДАЧА. Отъ конуса abc отдѣлить $\frac{4}{7}$ въ параллель основанію ab .

Ф. Рѣшен. Раздѣли ac на 7 равныхъ частей, 403. шей, отсчитай отъ c до a четыре части, сыщи между ac и cg двѣ среднія пропорціональныя линіи, сдѣлай cd равну первой средней; прорѣжѣ изъ d плоскостію de параллельно основанію ab , будетъ конусъ $dec = \frac{4}{7}$ конуса abc .

Доказ.

Доказ. Пусть вторая средняя $= x$,
будетъ $\div ab : dc : y : cg$ (501); и $ac : dc$
 $= ac : cg$ (503); также $abc : dec = ac : dc$
(478); того ради $abc : dec = ac : cg$
(ариф. 218); но $cg = \frac{4}{7} ac$, следовательно
но и $dec = \frac{4}{7} abc$.

533. ЗАДАЧА. Сдѣлать кубъ равенъ
 $\frac{2}{3}$ куба bad .

Рѣшен. Раздѣли бокъ куба ab на 5 ф.
равныхъ частей, сыщи между бокомъ ab куба bad , и прѣма пишинами онаго ah ,
двѣ среднія пропорціональныя линіи изъ
первой средней kl сдѣлай кубъ lkm по-
лучишь желаемое. 404.

Доказ. Пусть вторая средняя $= x$,
будетъ $\div ab : kl : x : ah$, и $ab : kl =$
 $ab : ah$ (503); но $ah = \frac{2}{3} ab$, следова-
тельно $kl = \frac{2}{3} ab$.

Примѣч. Такимъ же образомъ опредѣляющся,
шары, и подобныя правильныя и неправильныя пѣла
равныя требуемымъ частямъ данныхъ шаровъ и
подобныхъ правильныхъ и неправильныхъ пѣлъ;
только вмѣсто боковъ кубовъ должно употреблять
дѣаметры шаровъ, а въ прочемъ поступать по выше-
писанному.

534. ЗАДАЧА. узнать сколько разъ
шаръ y содержится въ шарѣ x .

Рѣшен.

Ф.
405.

Рѣшен. Къ діаметру cd и cb съиди четвертую пропорціональную линію fh (109); будетъ шаръ y содержаться въ шарѣ x столько разѣ, сколько діаметръ cd содержится въ четвертой пропорціональной fh .

Доказ. Понеже $cd : cb = (de) cb : bf = (eg) bf : fh$ (109), то есть будетъ $\frac{cd}{cb} = \frac{bf}{fh}$; посему $\frac{cd}{cb} = \frac{cd}{fh}$ (503); также $y : x = \frac{cd}{cb}$ (477), и такъ для равенства содержаній будетъ $y : x = \frac{cd}{fh}$.

Примѣч. Такимъ образомъ познается содержаніе кубовъ и всѣхъ подобныхъ правильныхъ и не правильныхъ шѣлъ въ другихъ данныхъ подобныхъ шѣлахъ.

КОНЕЦЪ ВТОРОЙ ЧАСТИ.



ПОГРѢШНОСТИ

спраницы	спроки	напечатано	читай
7 - -	2 -	ab	eb
12 - -	8 -	ac	ae
14 - -	12 -	abe	abc
53 - -	27 -	agb	bag
54 - -	7 -	$\frac{1}{2}gh$	$\frac{1}{2}dh$
58 - -	16 -	ag	ac
	18 -	be	bc
60 - -	18 -	fg	eg
64 - -	14 -	gd	$9d$
71 - -	7 изъ найденнаго. изъ даннаго		
96 - -	24	$ab + (ac) af. (ab) af + ac$	
116 - -	21	прлжи -	продолжи
118 - -	13	хорды de -	хорды dc
120 - -	1	преугольникъ	преуголь- никовъ
	2 -	de	dc
	16 -	bc	bd
140 - -	21 -	ac	ac
143 - -	6 -	ad	ab
154 - -	7 -	какакъ -	какъ
157 - -	5 -	bai	bac
158 - -	16 -	и efm	и fem
162 - -	24 -	$\frac{1}{15}fat$	$\frac{1}{15}fxm$
169 - -	8 -	Мѣцѣво -	Мѣцѣево
183 - -	29 -	(26) -	(266)
206 - -	16 -	abf	abf
209 - -	28 и 29	вѣ $2\frac{3}{4}$	вѣ $2\frac{2}{3}$
216 - -	20 -	$abdc$	$abdc$
218 - -	12 -	$ach + acd$	$dch + acd$
221 - -	13 -	abc	abd
			223

223	-	14	-	ф. 268	-	ф. 260
225	-	31	-	afg	-	gdf
231	-	6	-	mcg	-	msg
249	-	3	-	n	-	n
251	-	23	-	acb и acd.	bac и cad	
254	-	7	-	суммѣ бо.	суммѣ бо-	
						ковѣ
258	-	25	-	и df	-	и di
265	-	28	-	eh	-	ch
266	-	8	-	(cq) hc	-	(sq) hc
268	-	8	-	lm	-	em
		18	-	bcv	-	bav
273	-	23	-	полукруга.	полукруга	
277	-	16	-	діамет. ad.	діамет. ab	
307	-	5	-	$\frac{1121}{3}$	-	$\frac{1122}{3}$
310	-	20	-	aizf	-	aezf
320	-	20	-	$\sqrt[2]{4200''}$	-	$\sqrt[3]{4200''}$
347	-	8	-	bg	-	eg

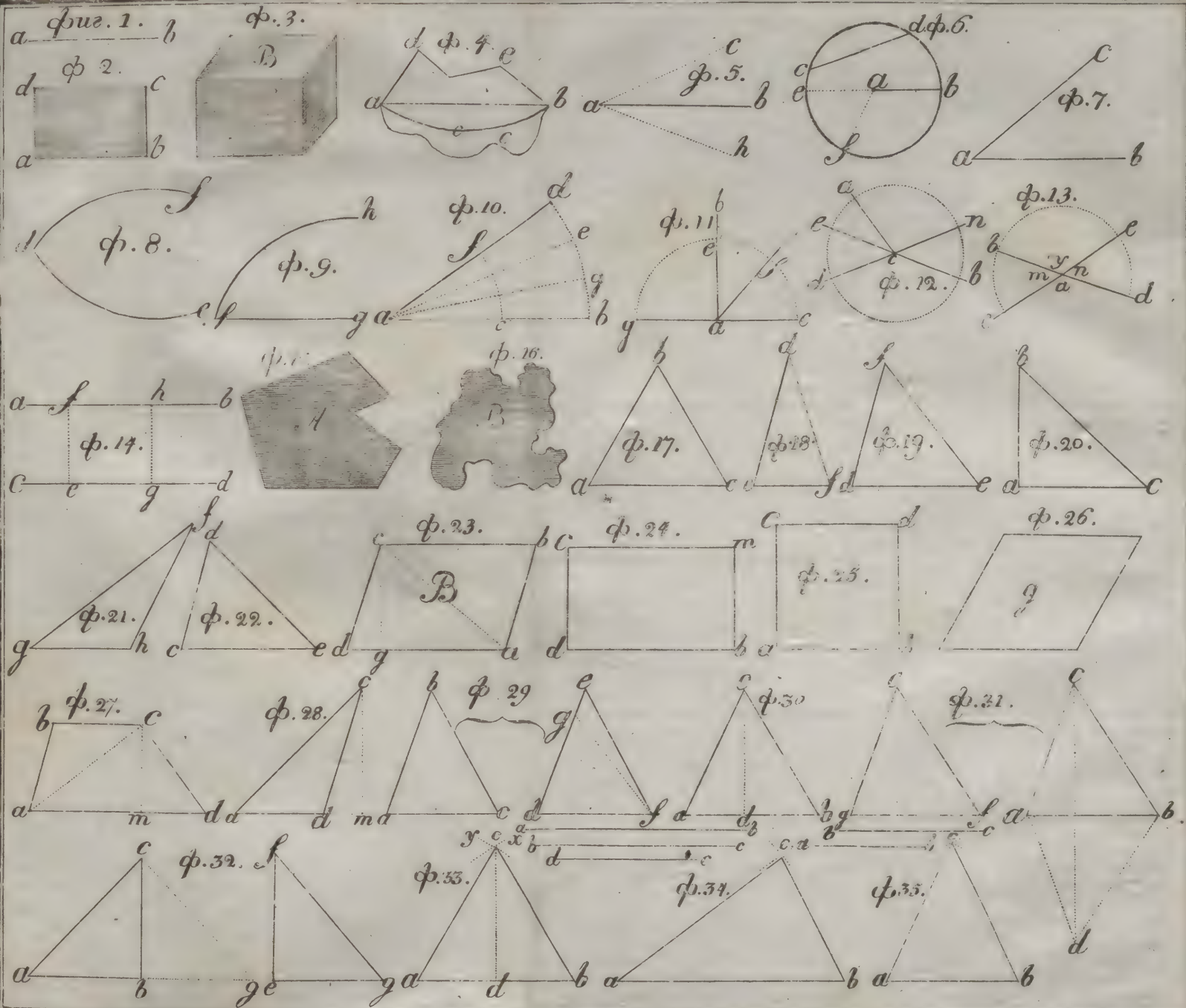
Наставленіе переллетчику

Черпежи сея книги должно поставити
 шакѣ, чпо бы лѣвая рамка каждаго черпежа
 находилась у самага обрѣза книги; дабы
 не полымая книжныхъ листовѣ, можно бы-
 ло на вынупомѣ изѣ книги черпежѣ, обо-
 зрѣти всѣ изображенныя фигуры.

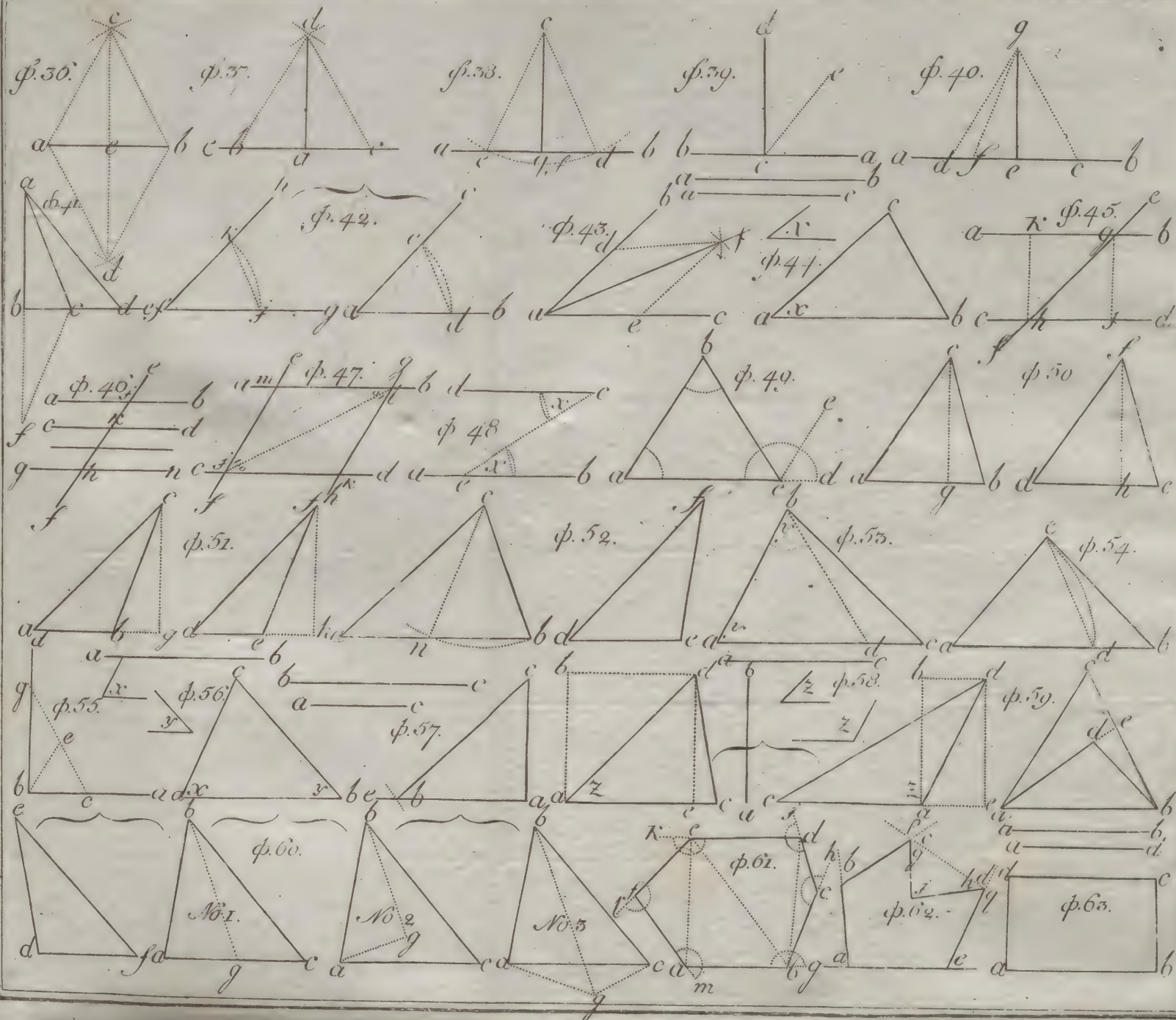
ГОСУДАРСТВЕННАЯ
 БИБЛИОТЕКА

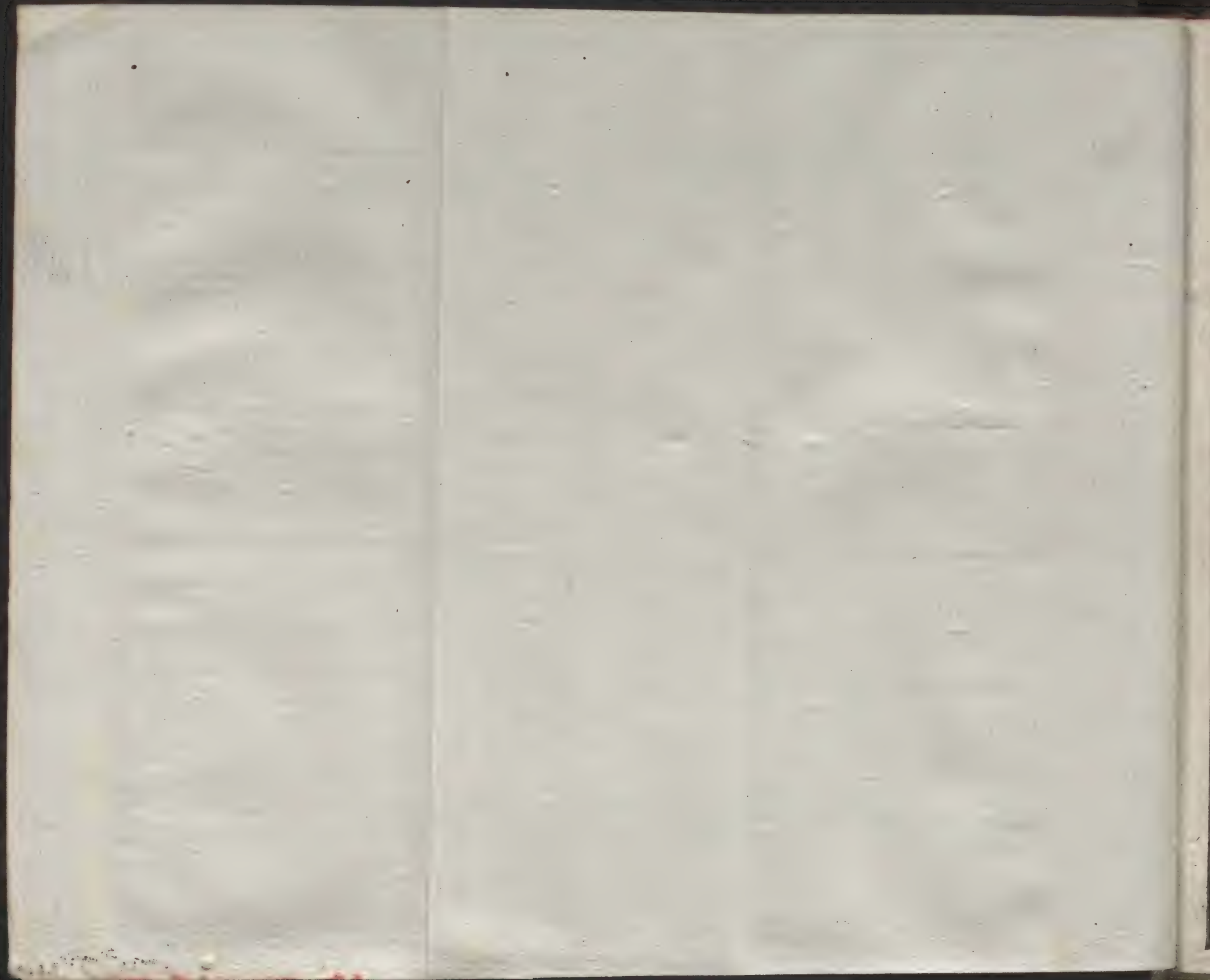
31442-0

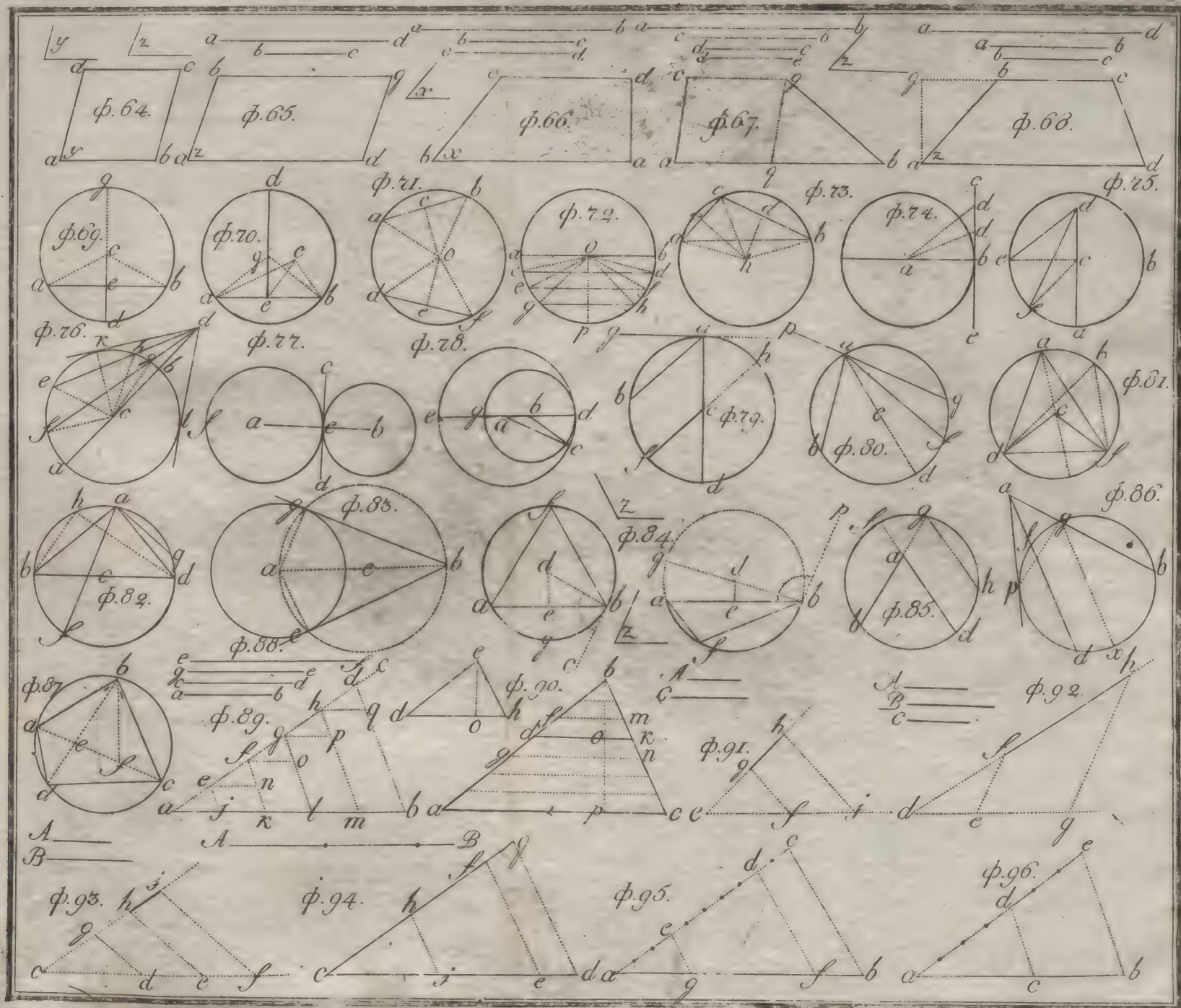
кн-30952

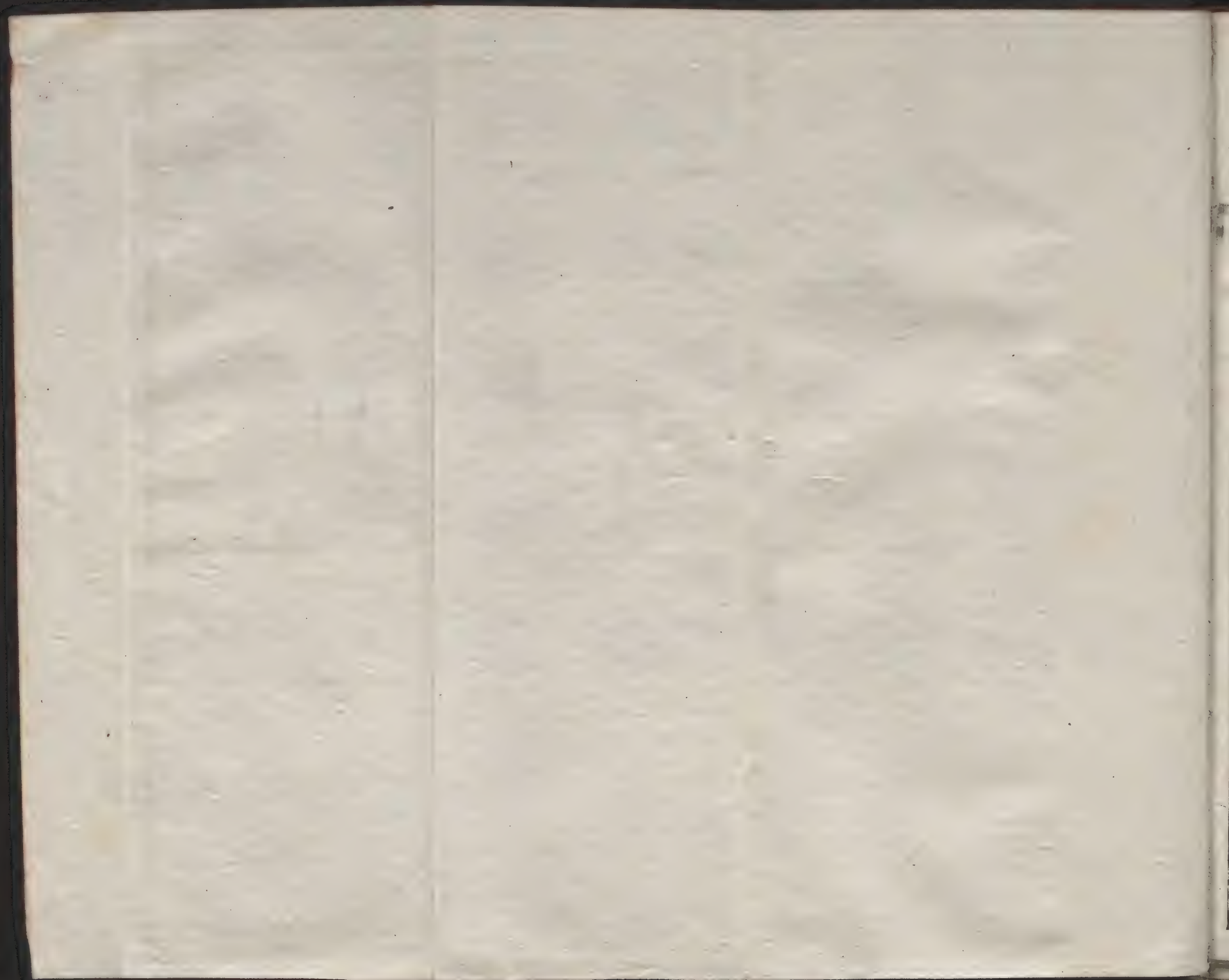


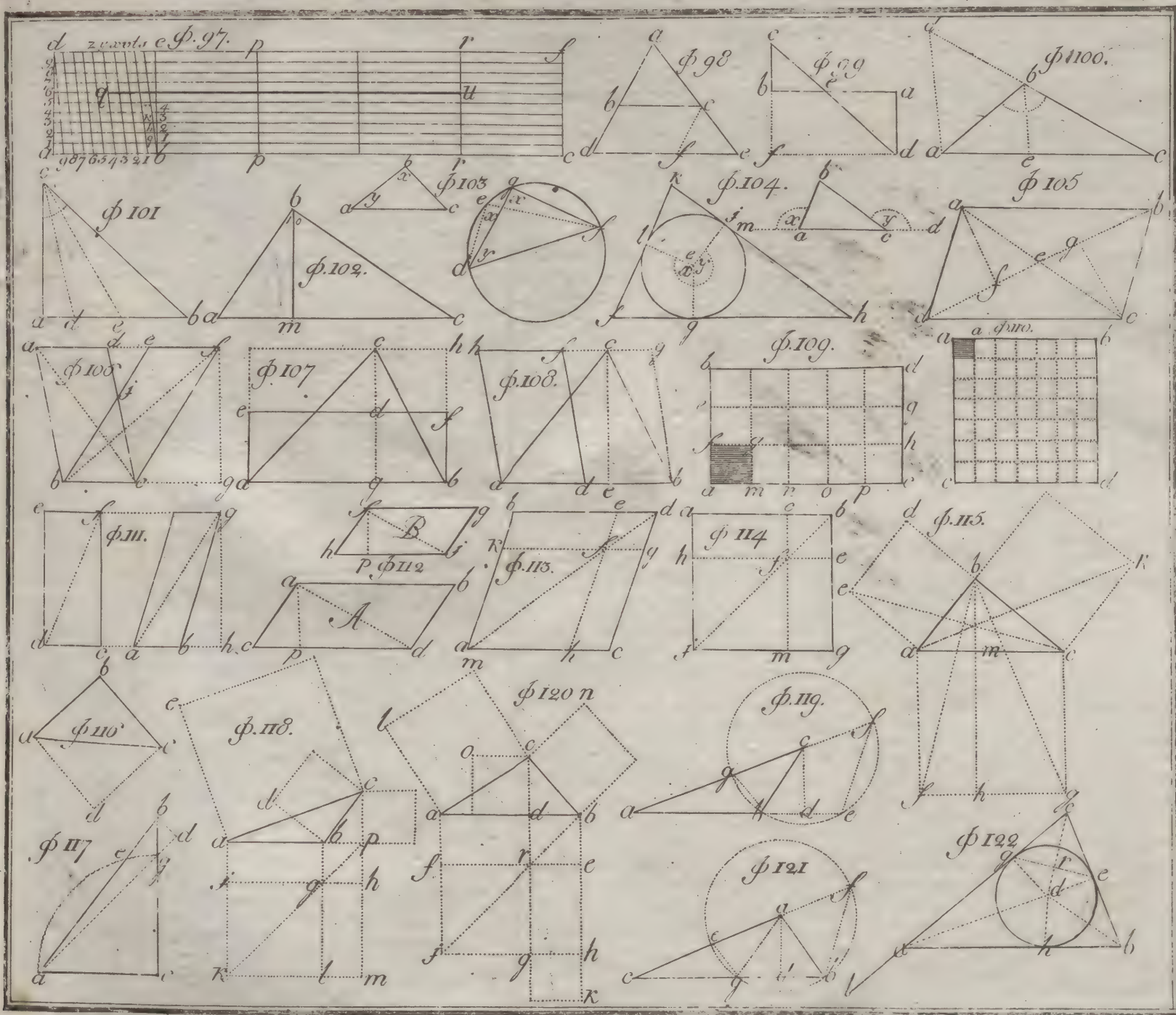
5
a
6
f
g
a
g
6
e
d

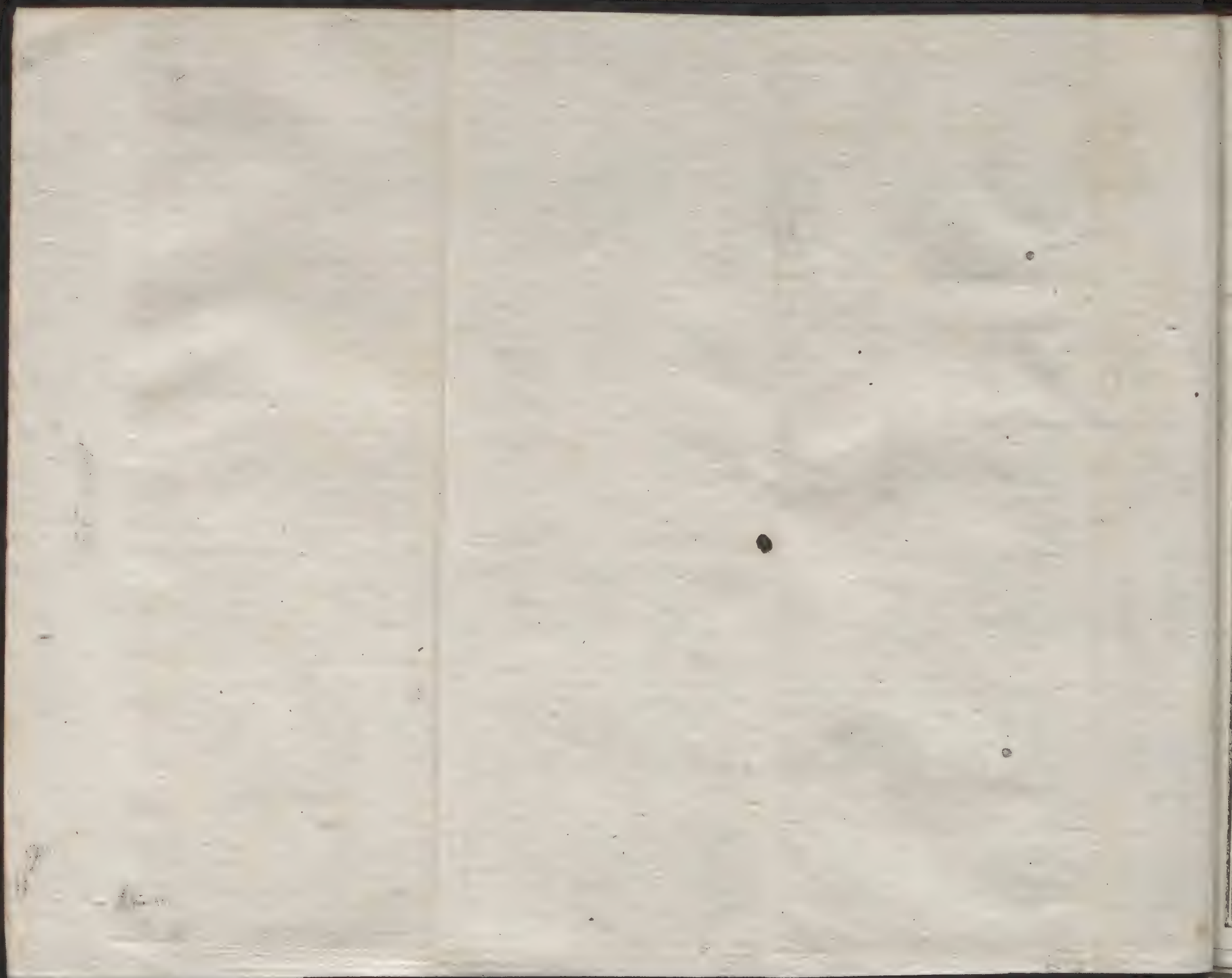


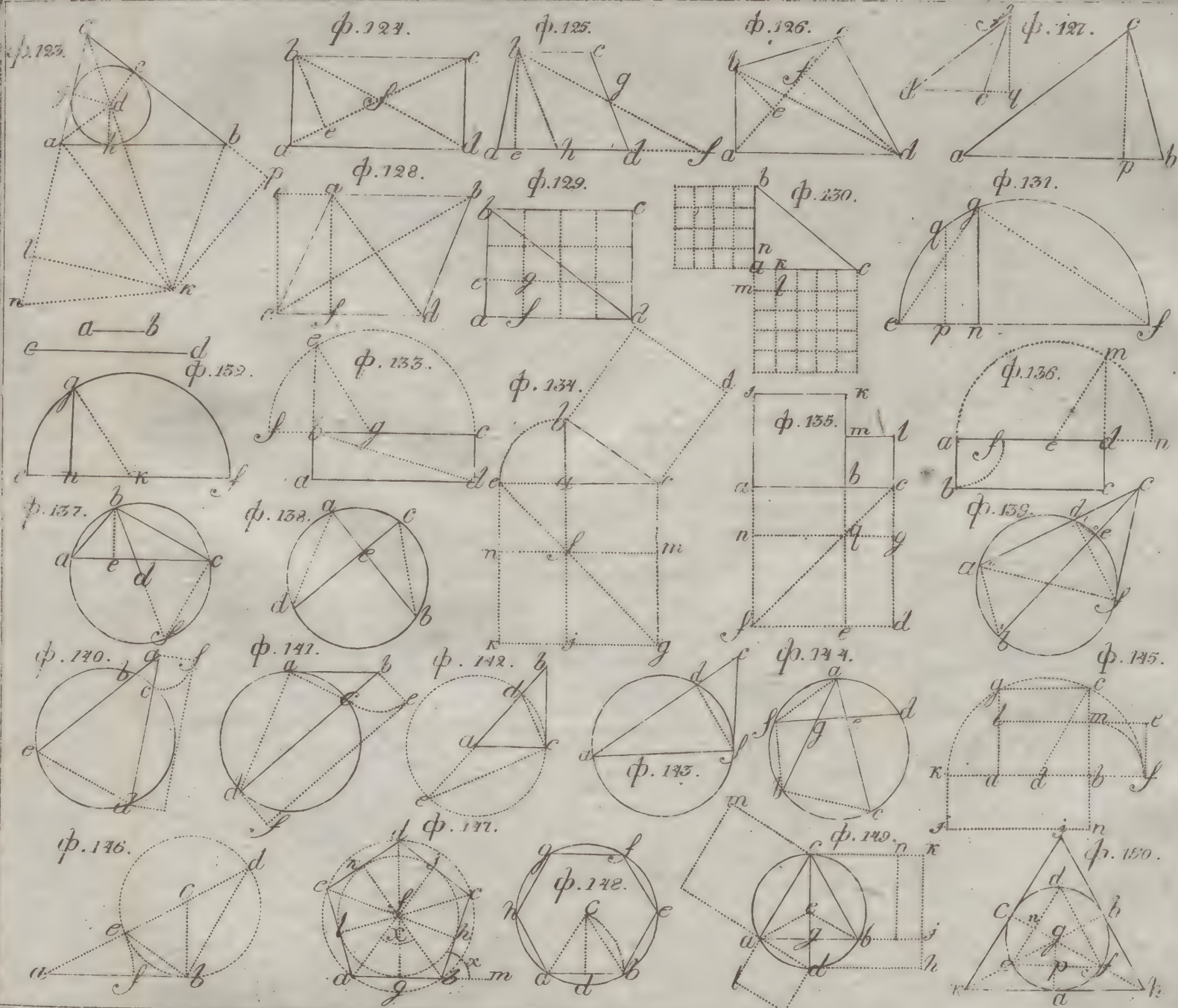


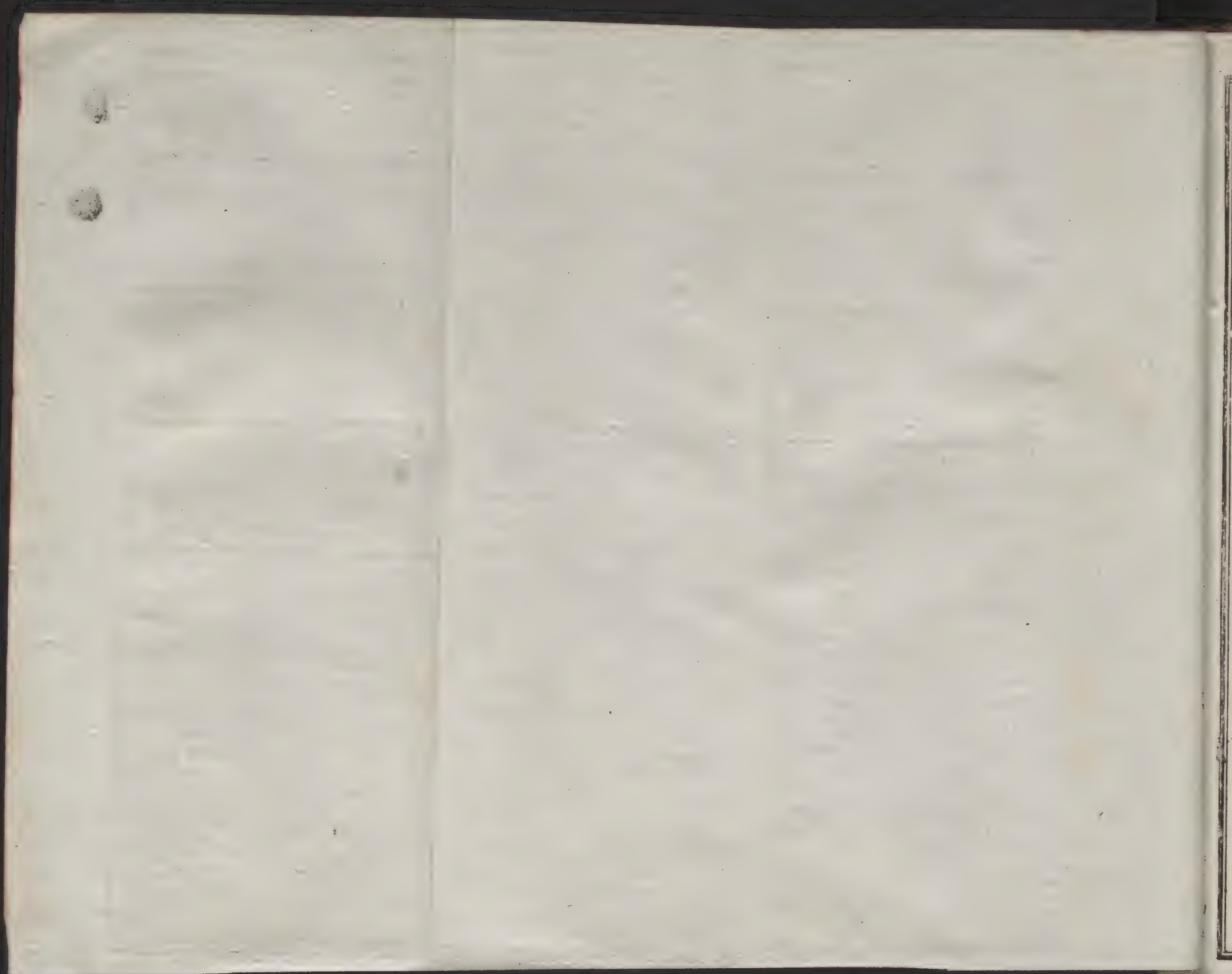


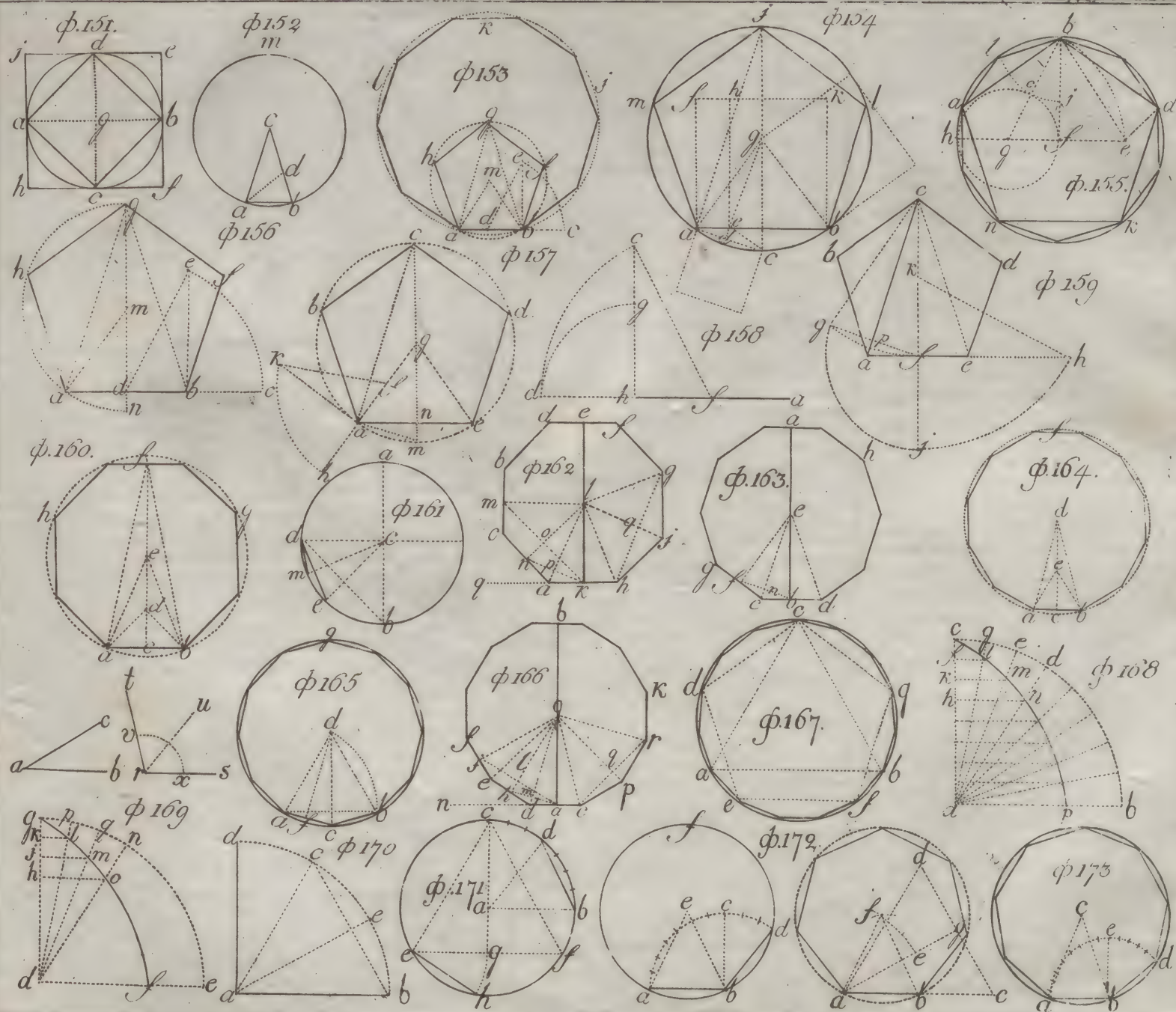


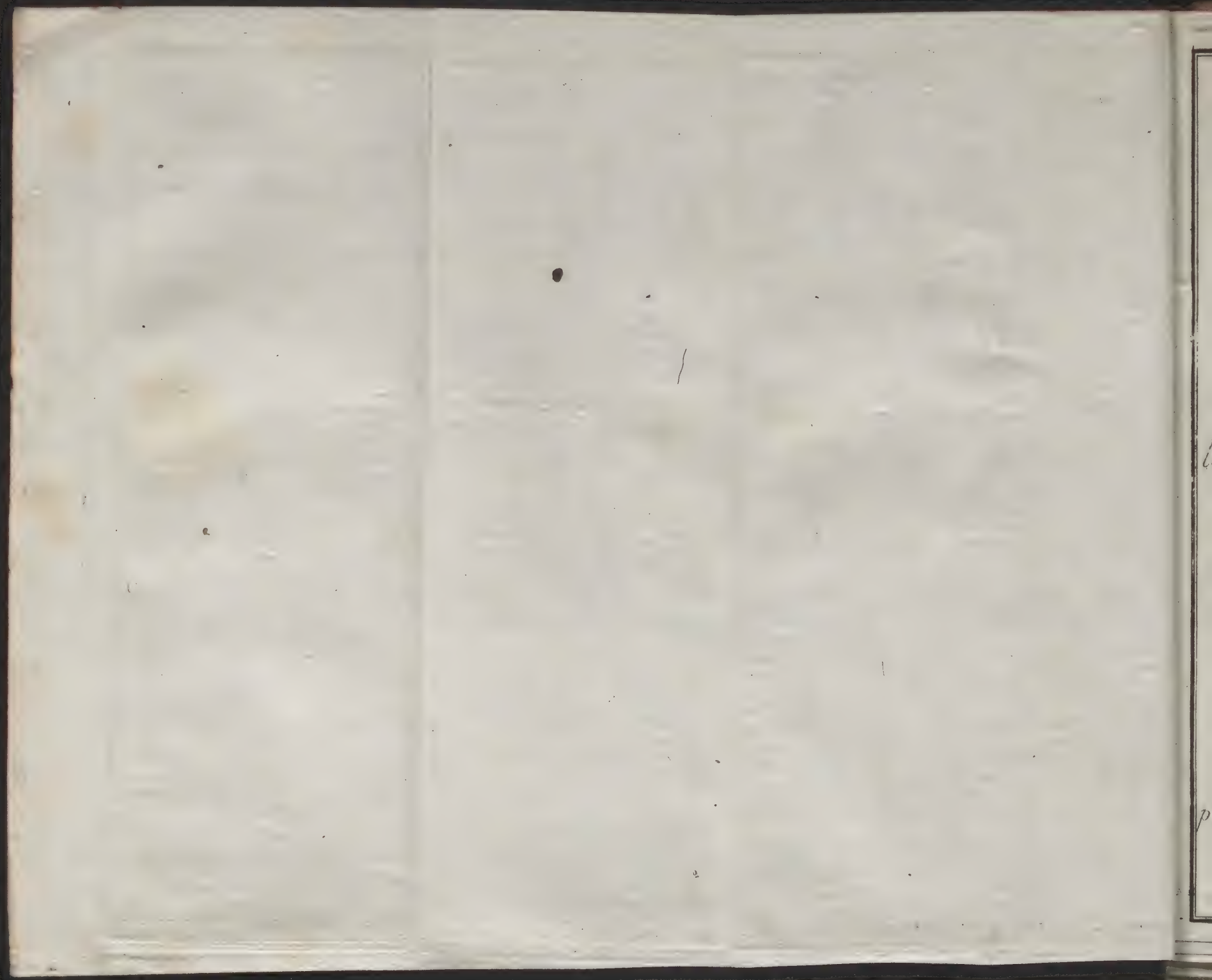




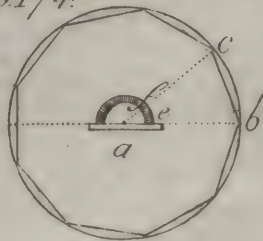




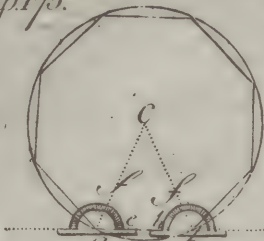




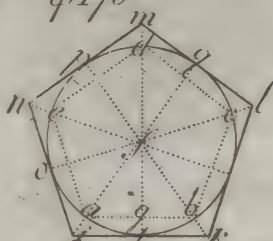
φ.174.



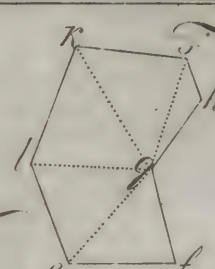
φ.175.



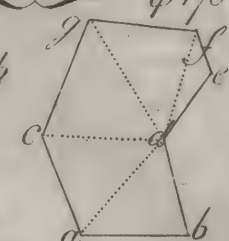
φ.176.



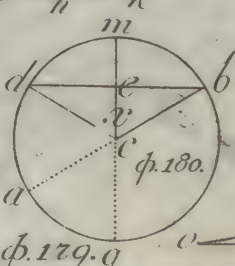
φ.177



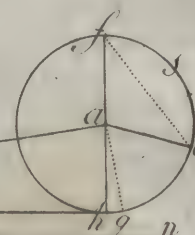
φ.178



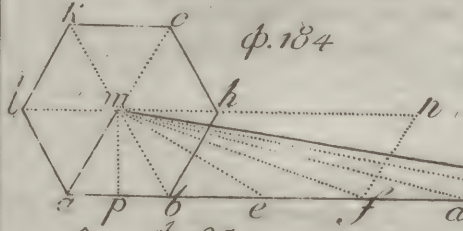
φ.181.



φ.182.



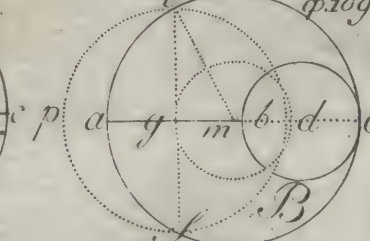
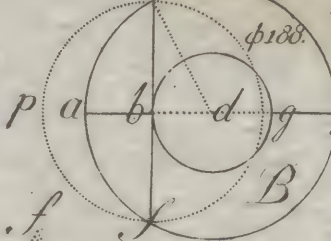
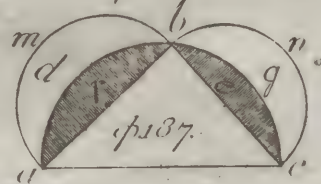
φ.184



φ.185.

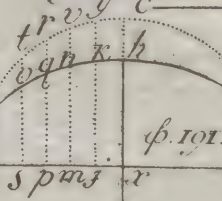
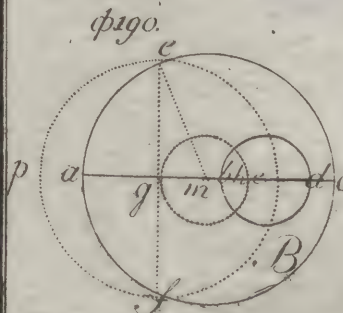


φ.186.

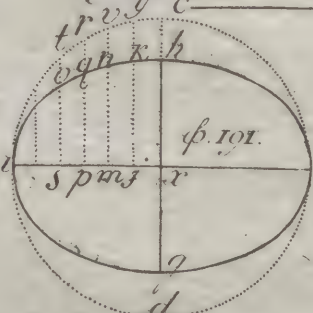


φ.189.

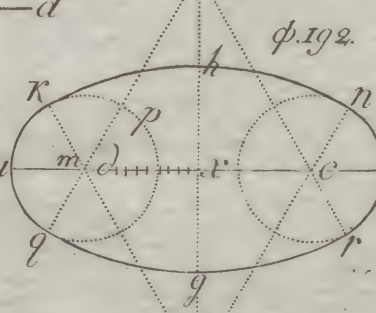
φ.190.



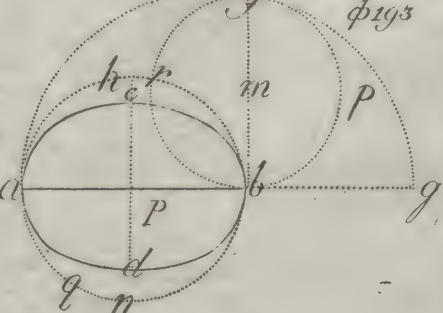
φ.191.

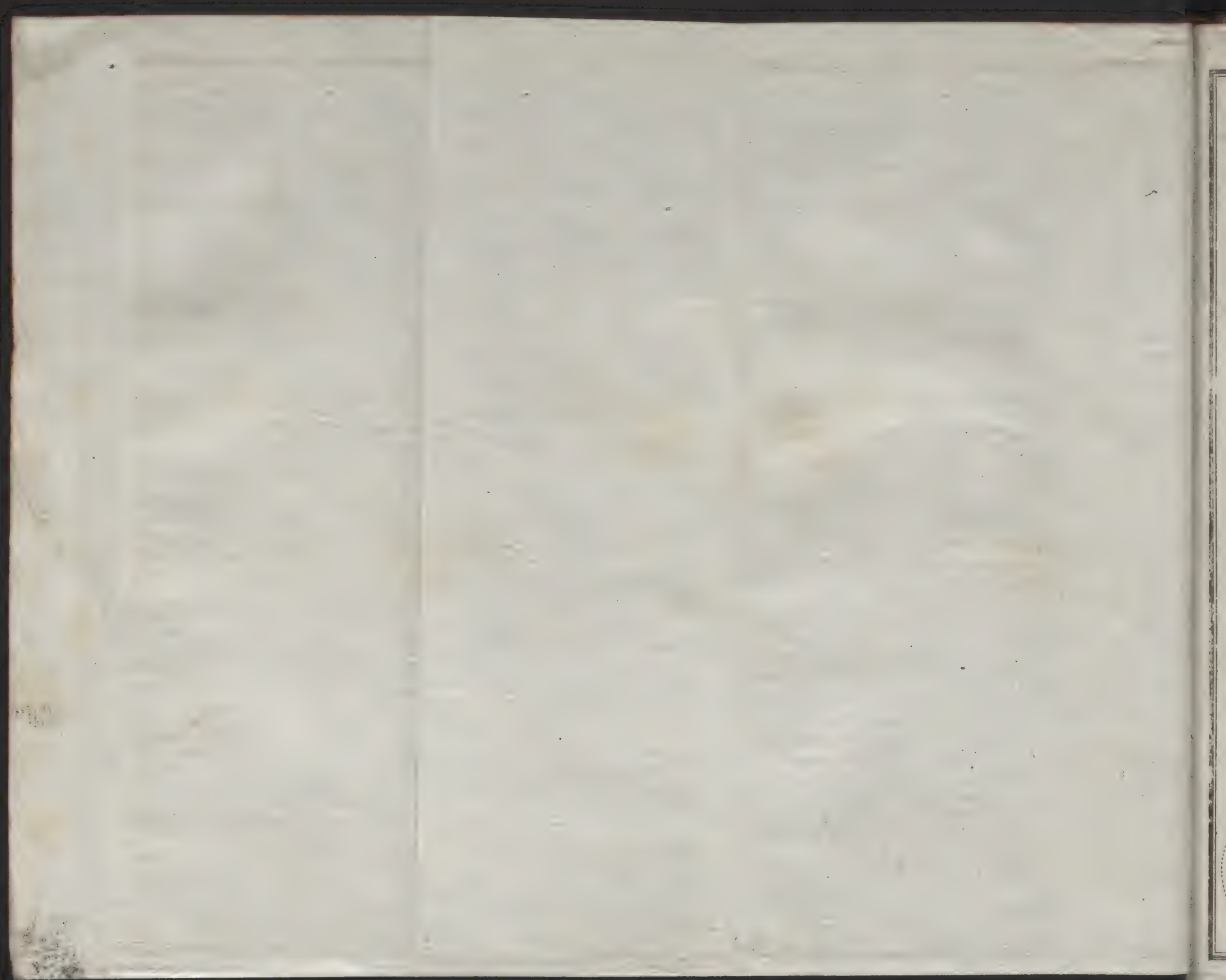


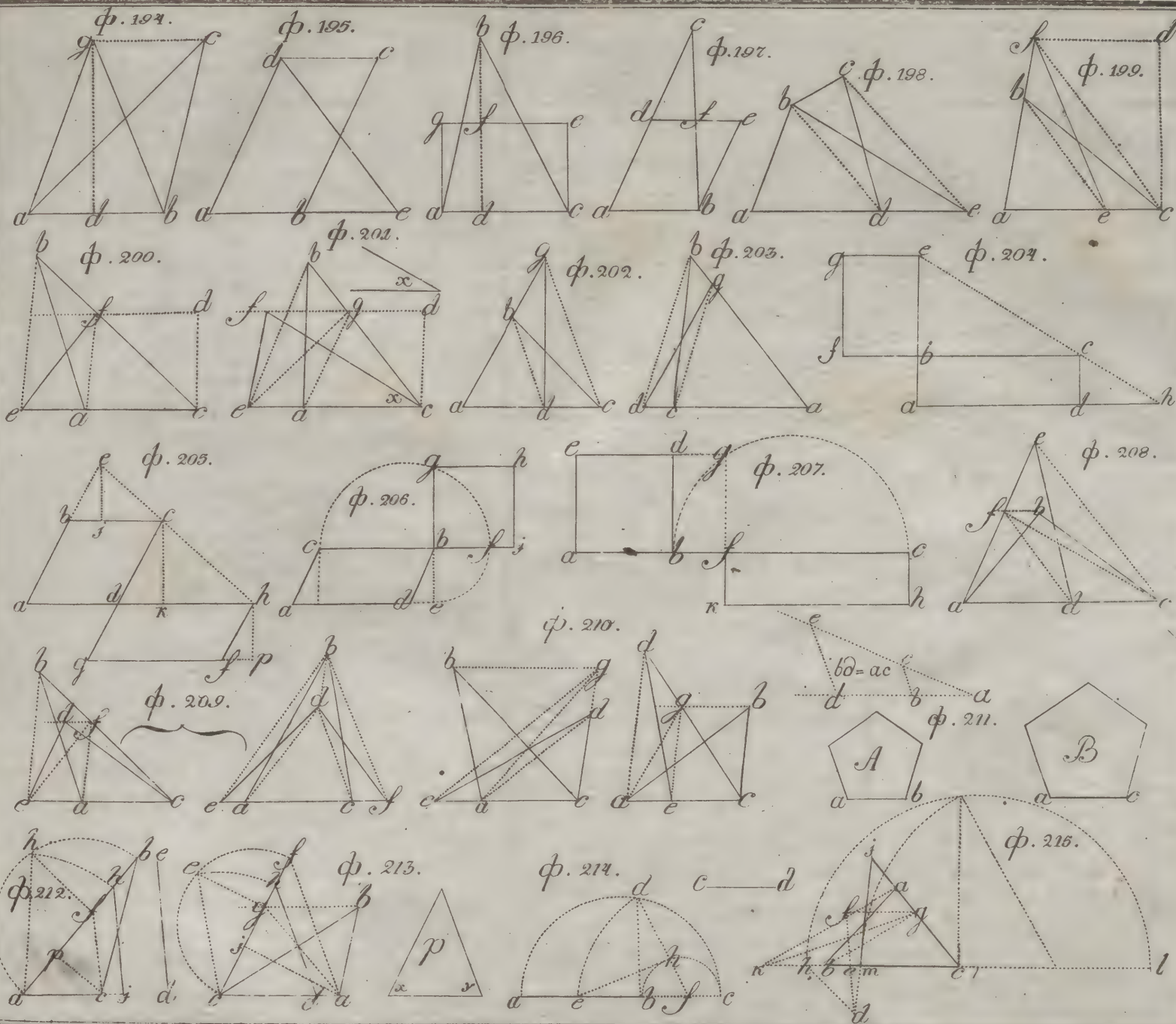
φ.192.

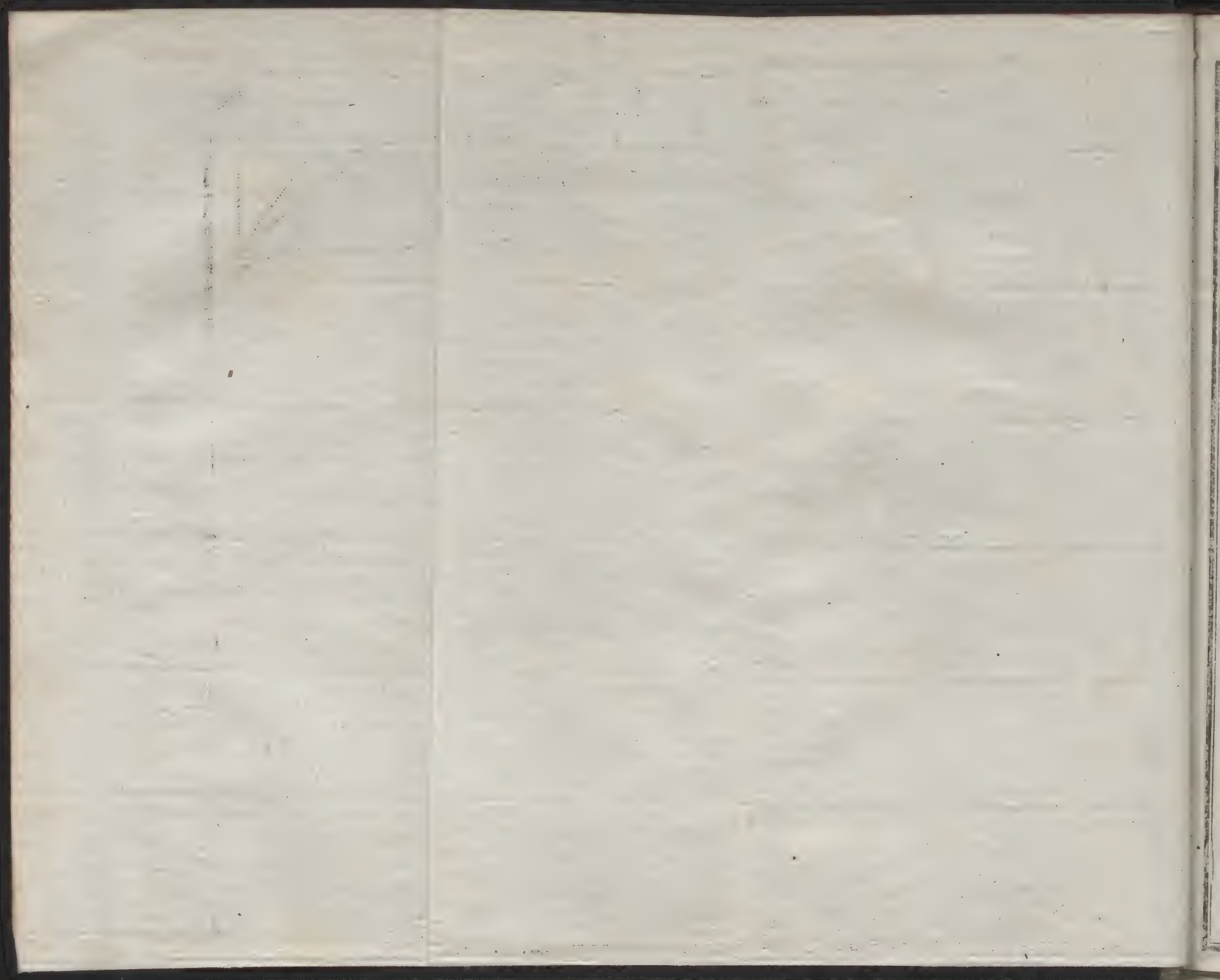


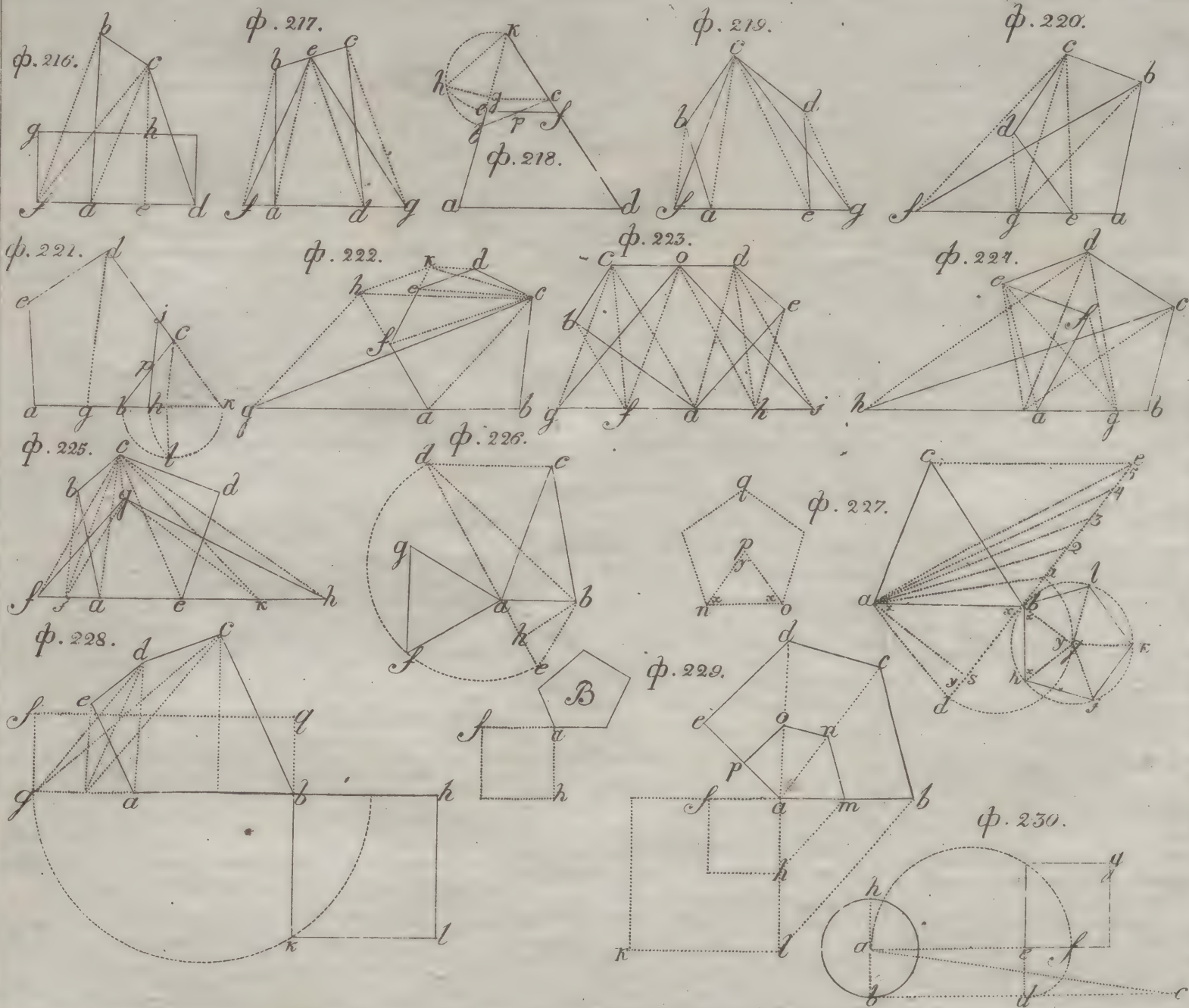
φ.193





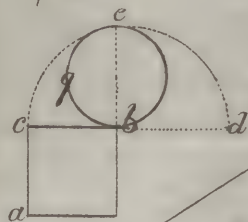




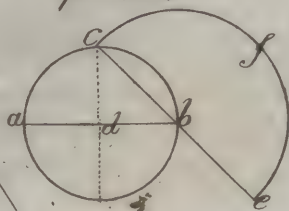




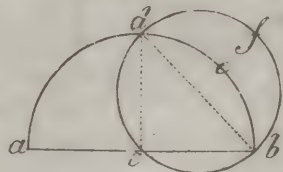
φ. 231.



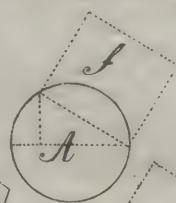
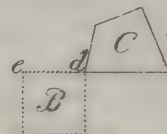
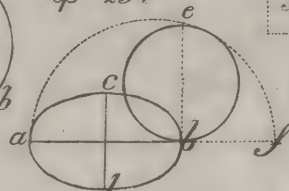
φ. 232.



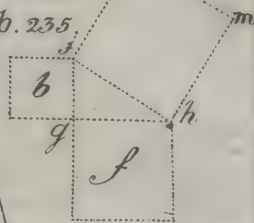
φ. 233.



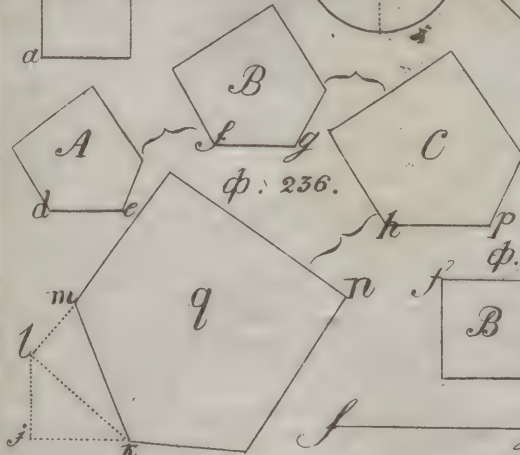
φ. 234



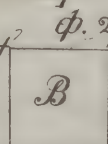
φ. 235.



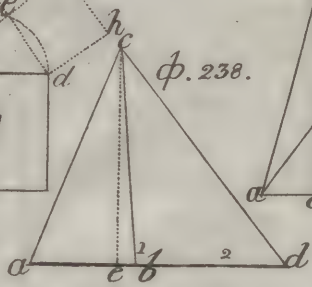
φ. 236.



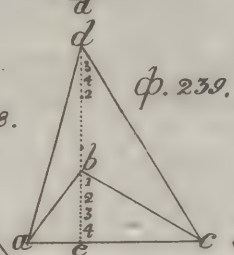
φ. 237.



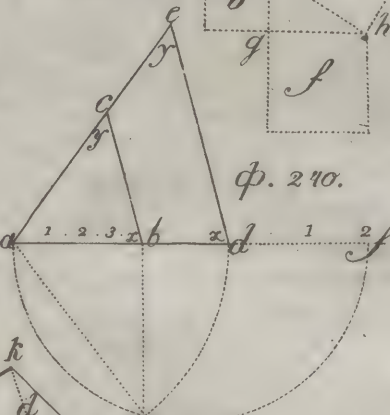
φ. 238.



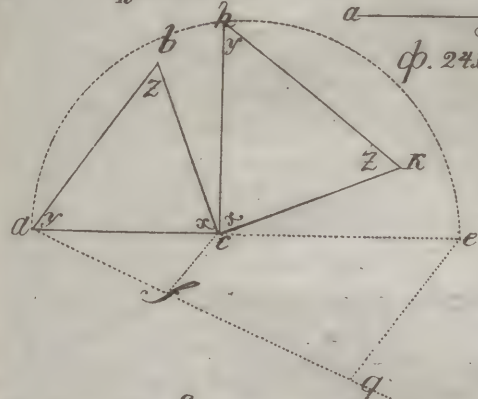
φ. 239.



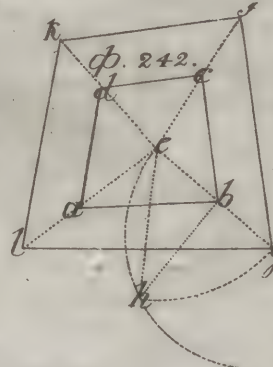
φ. 240.



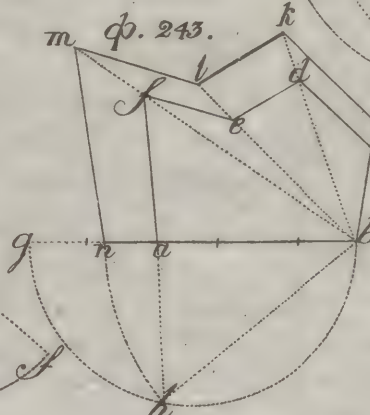
φ. 241.



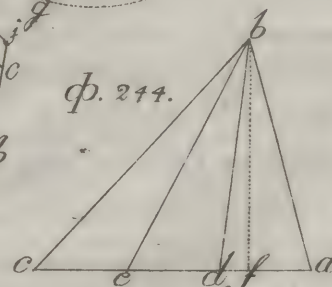
φ. 242.



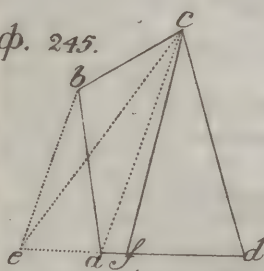
φ. 243.



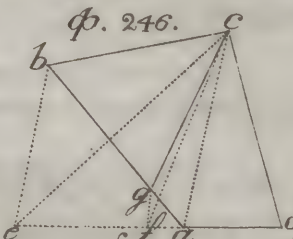
φ. 244.



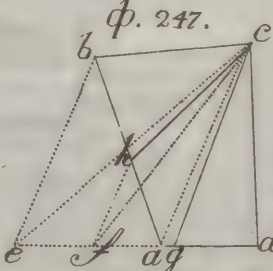
φ. 245.



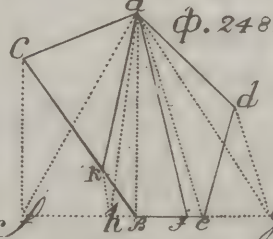
φ. 246.



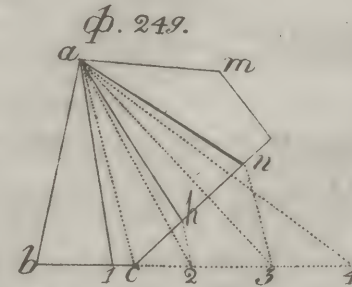
φ. 247.

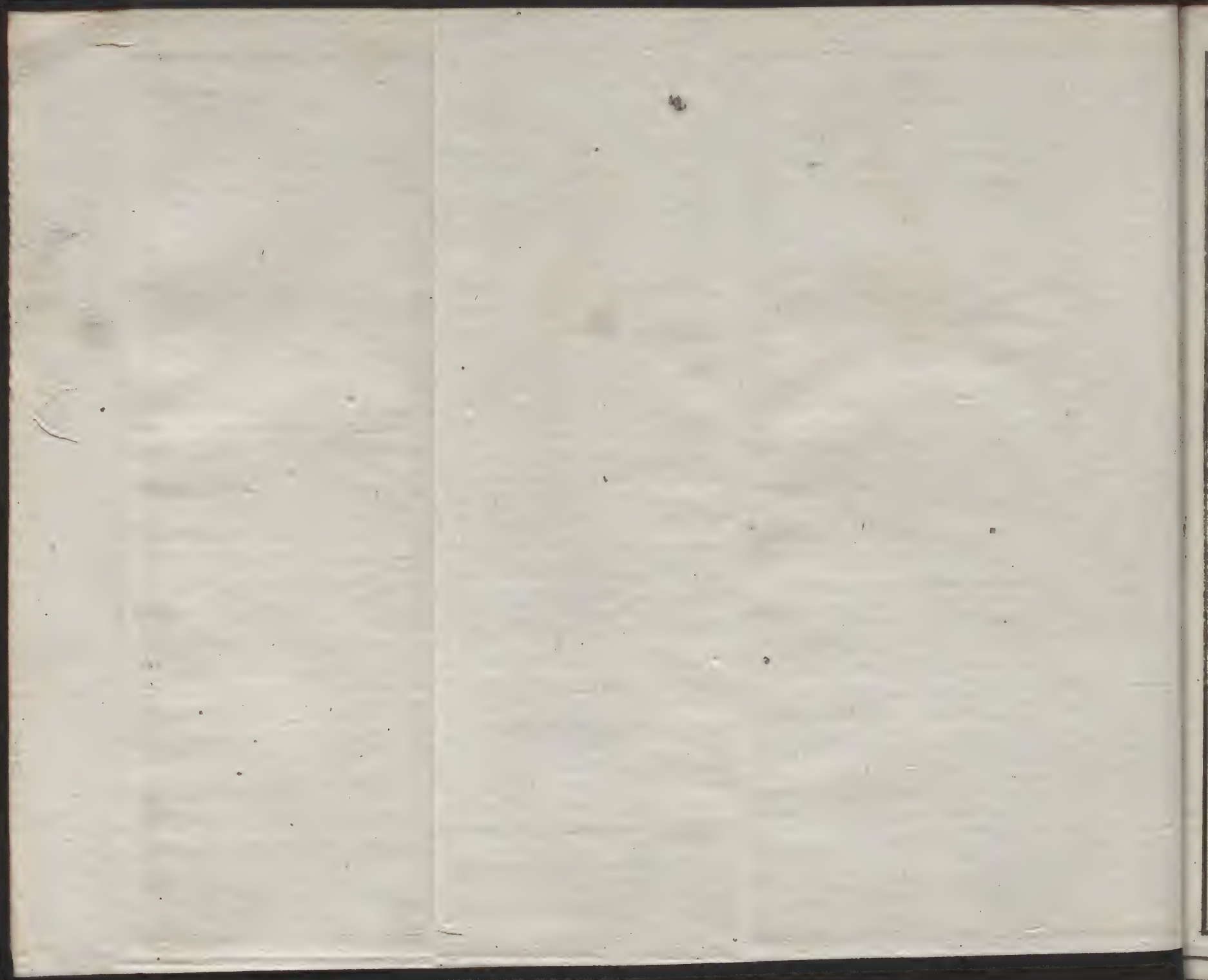


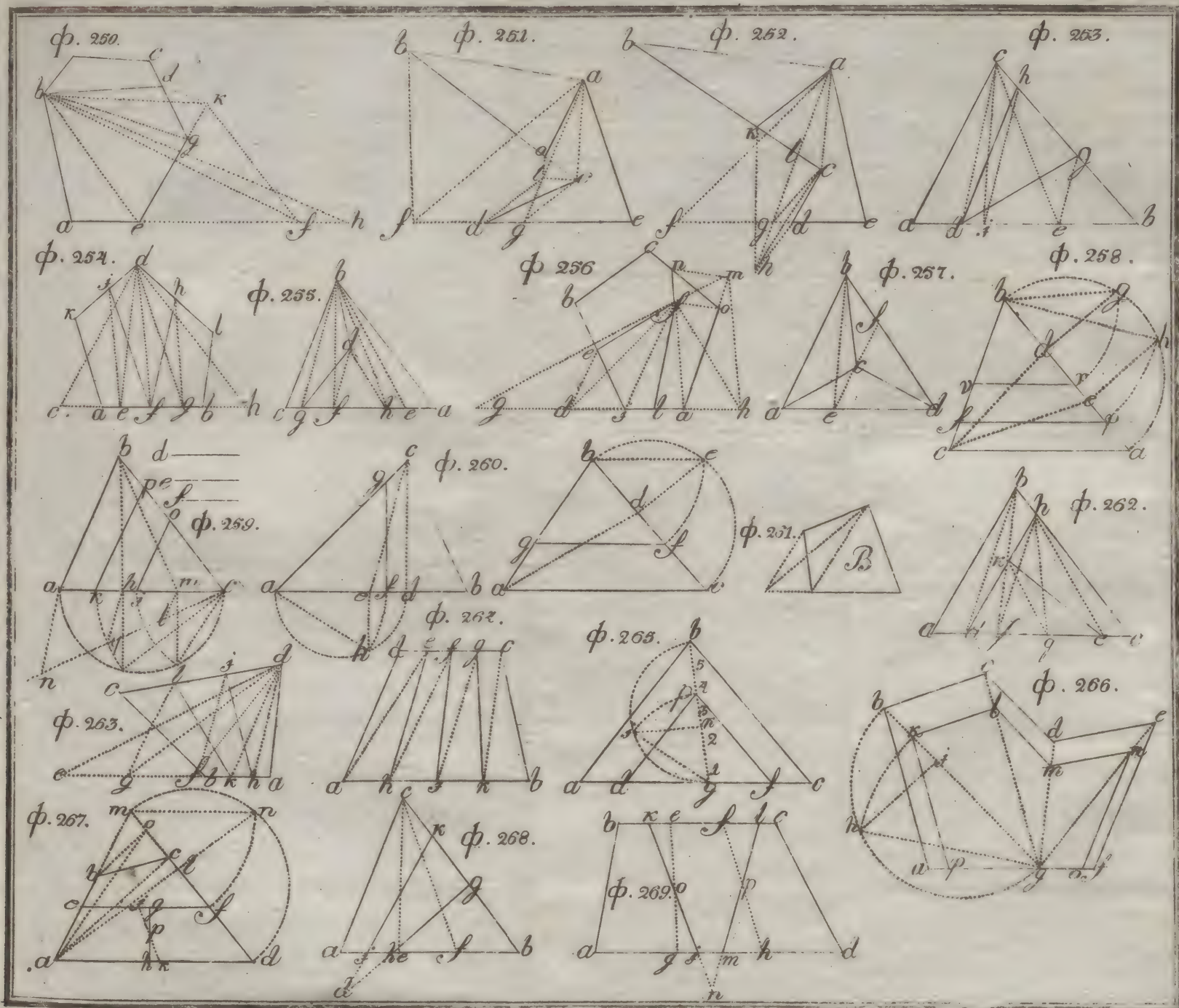
φ. 248.



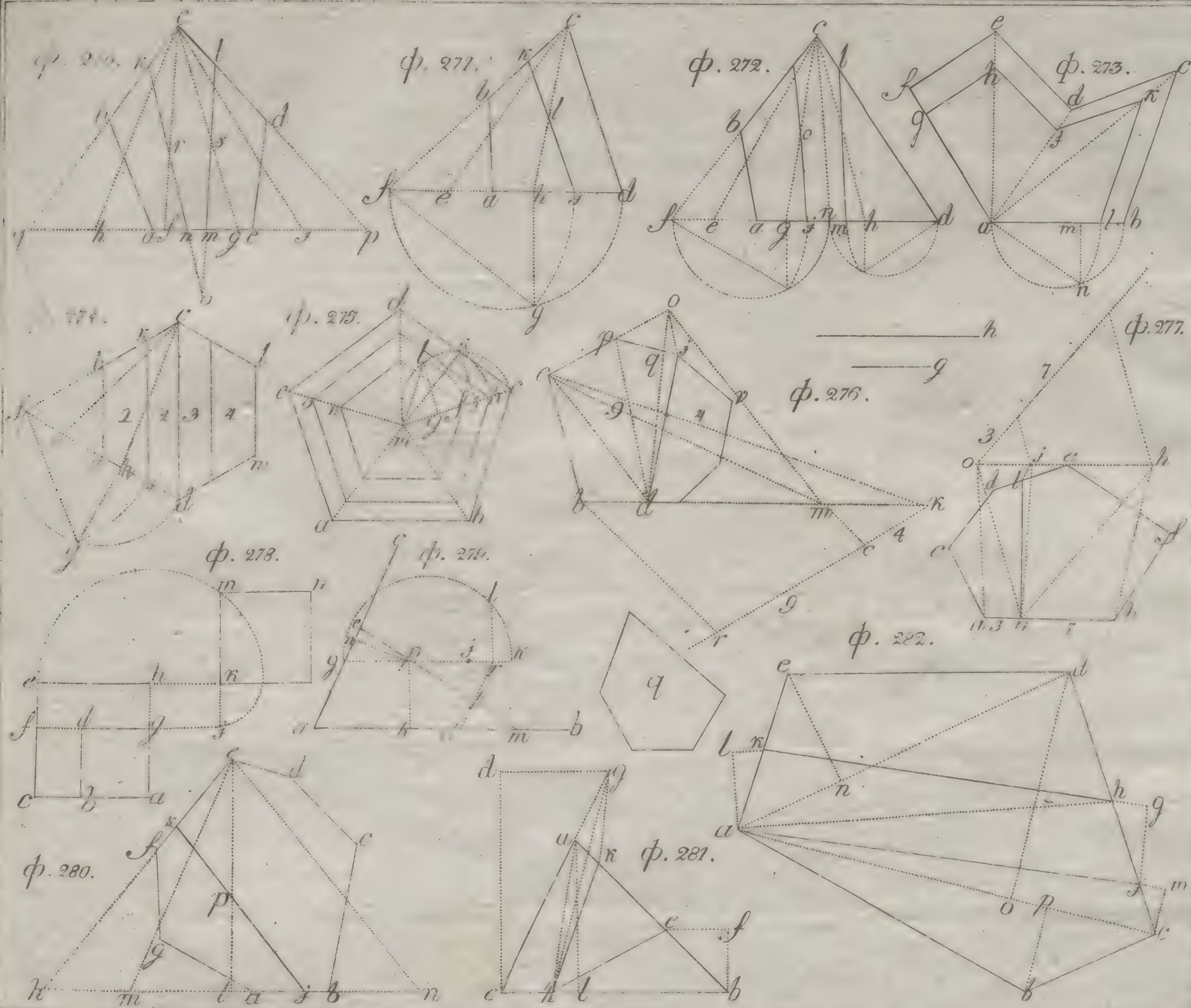
φ. 249.

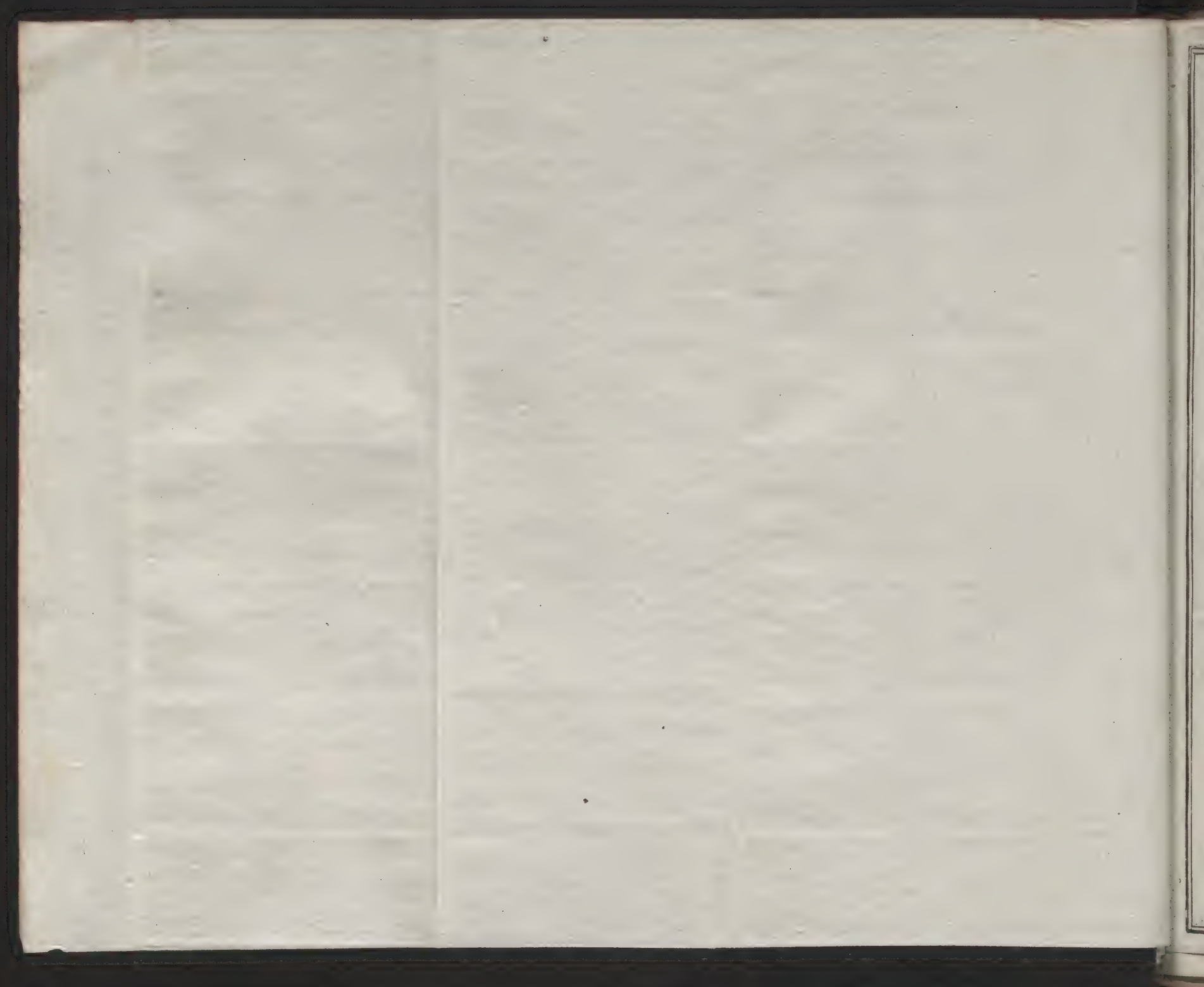


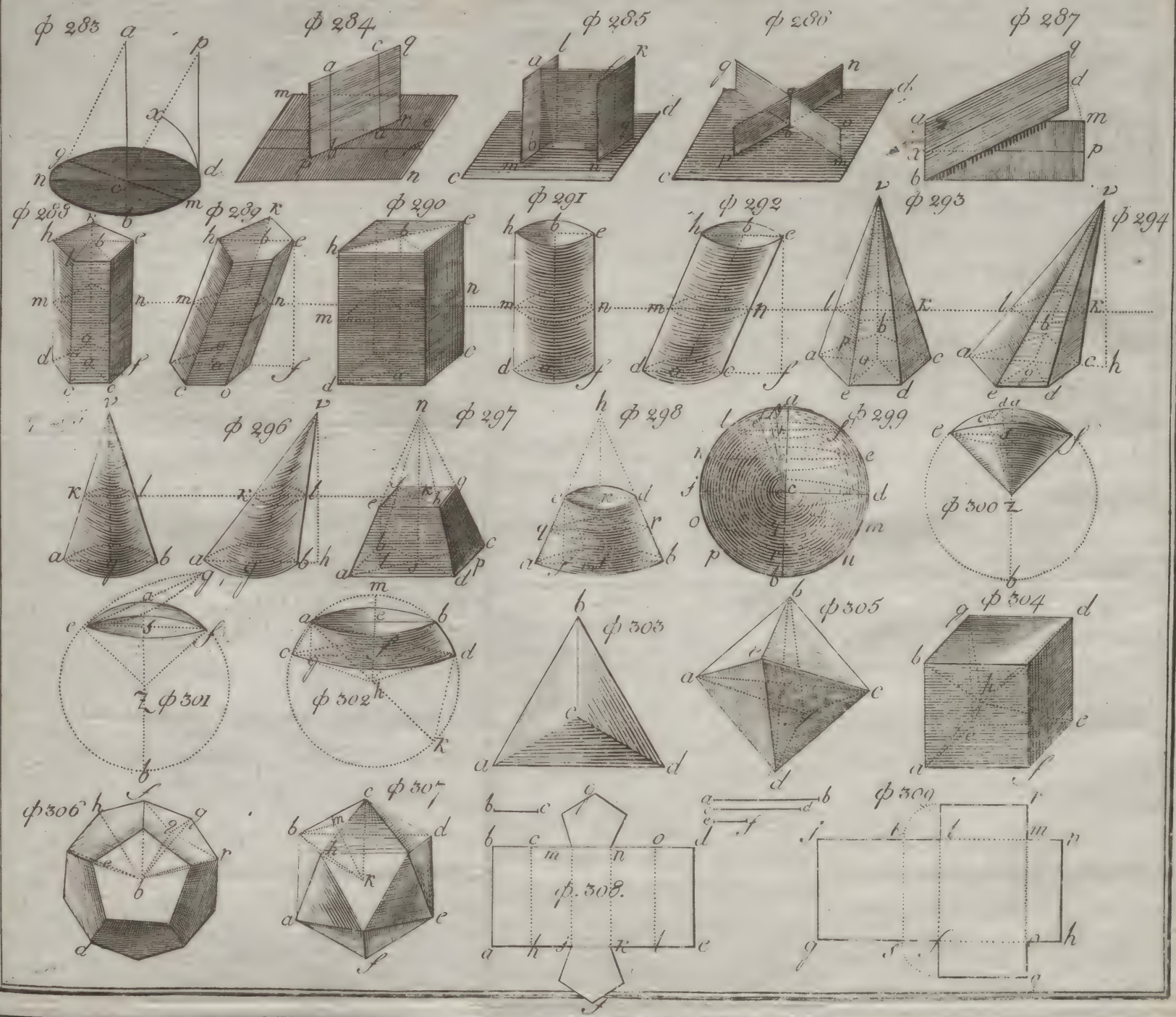


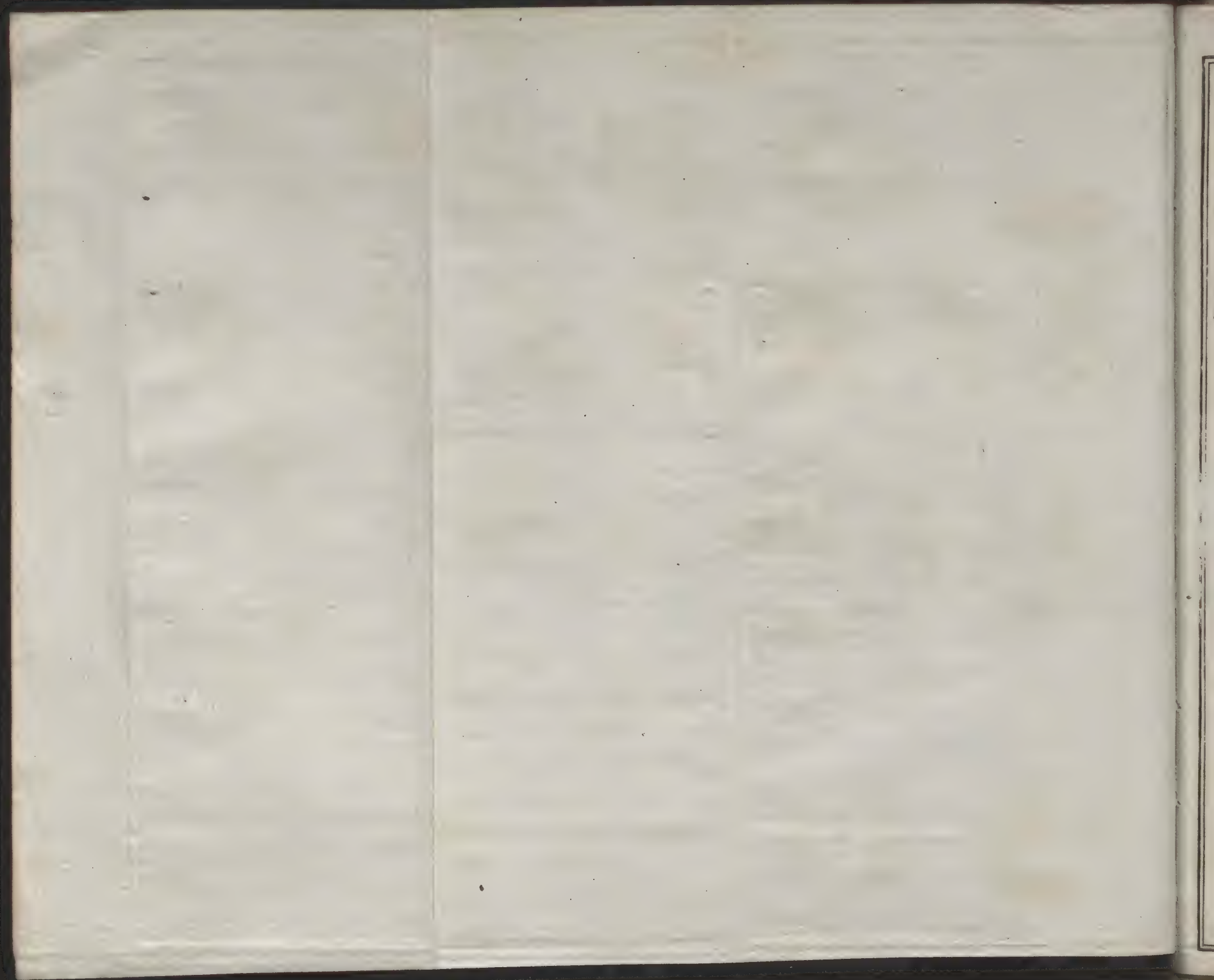


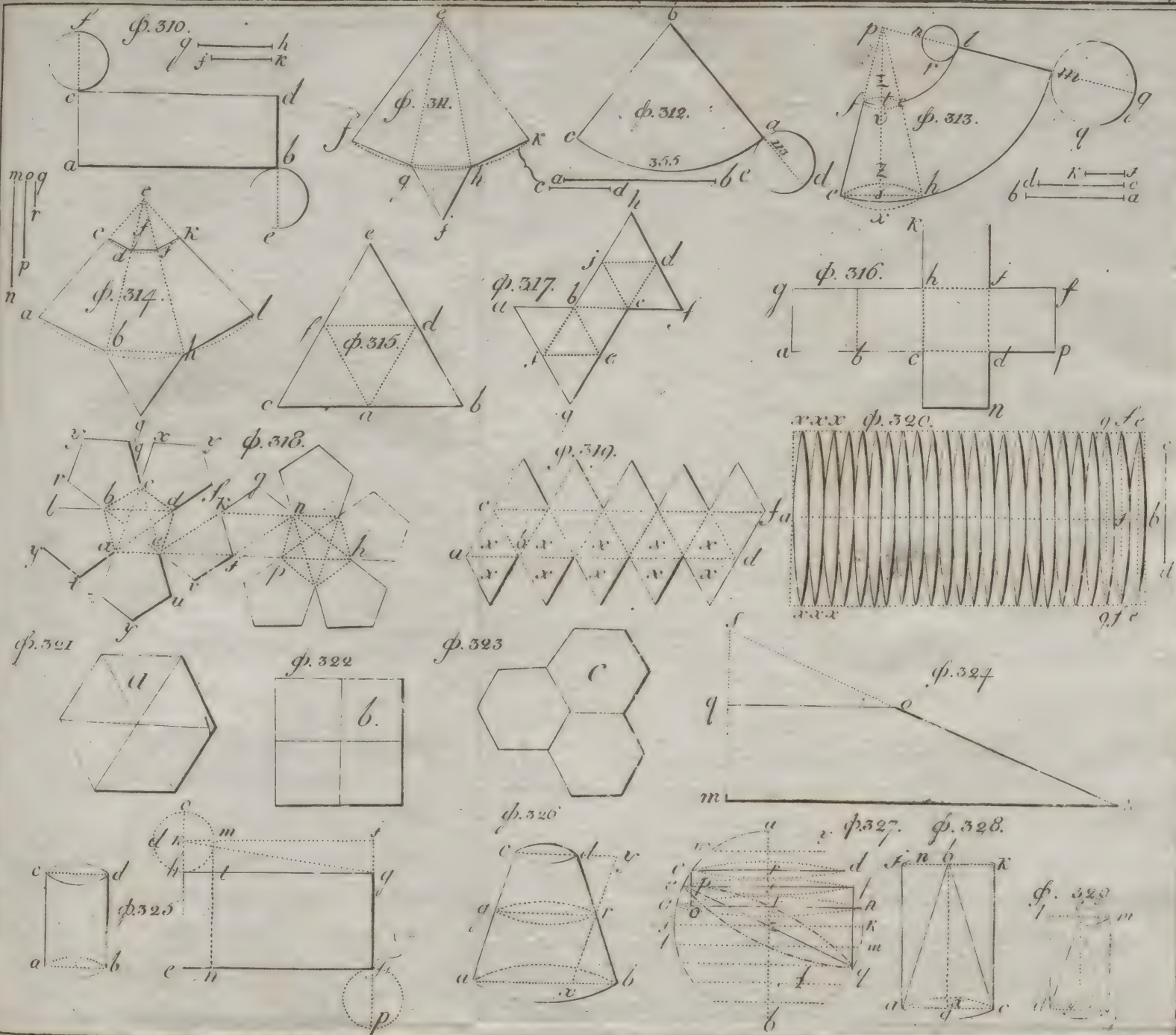




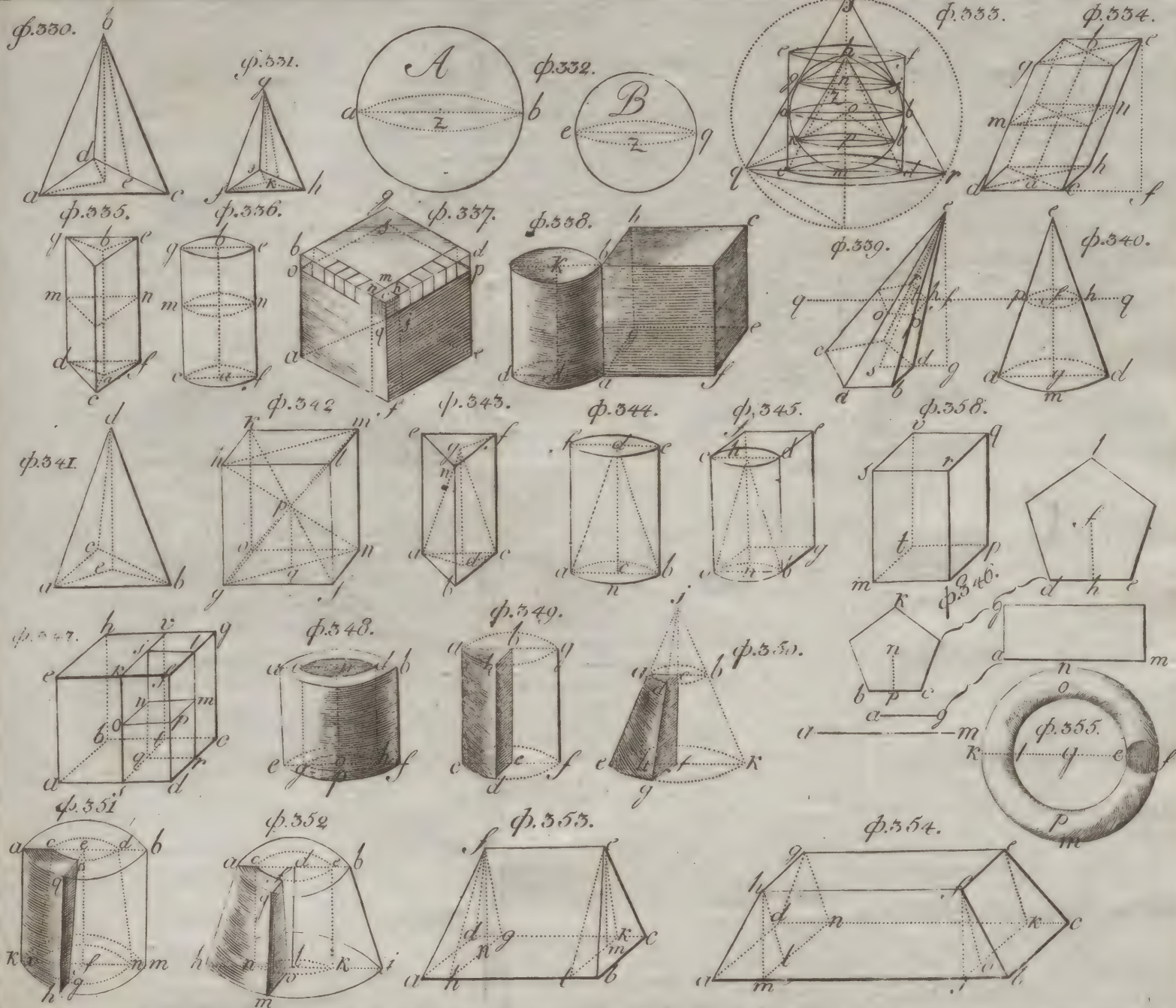


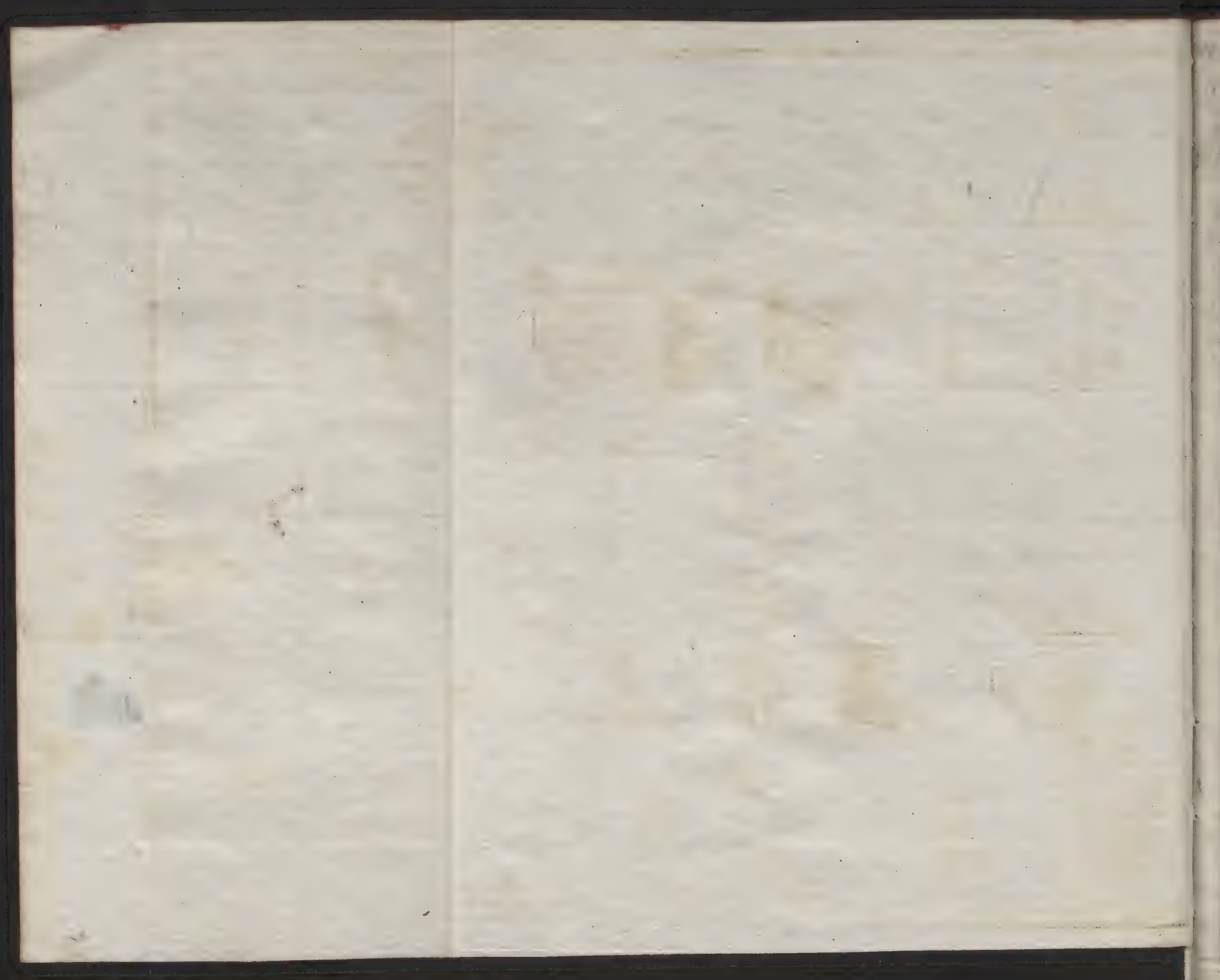


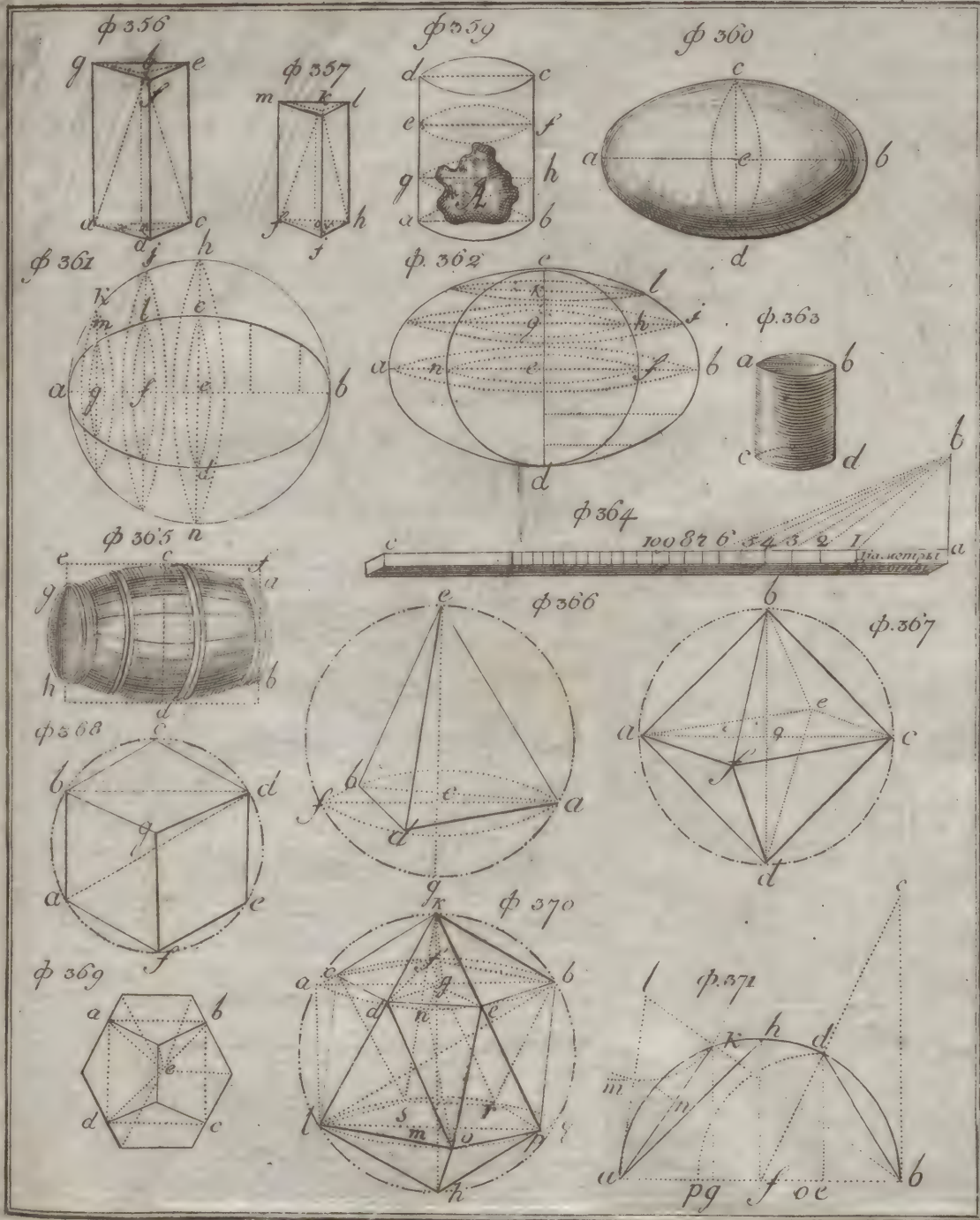


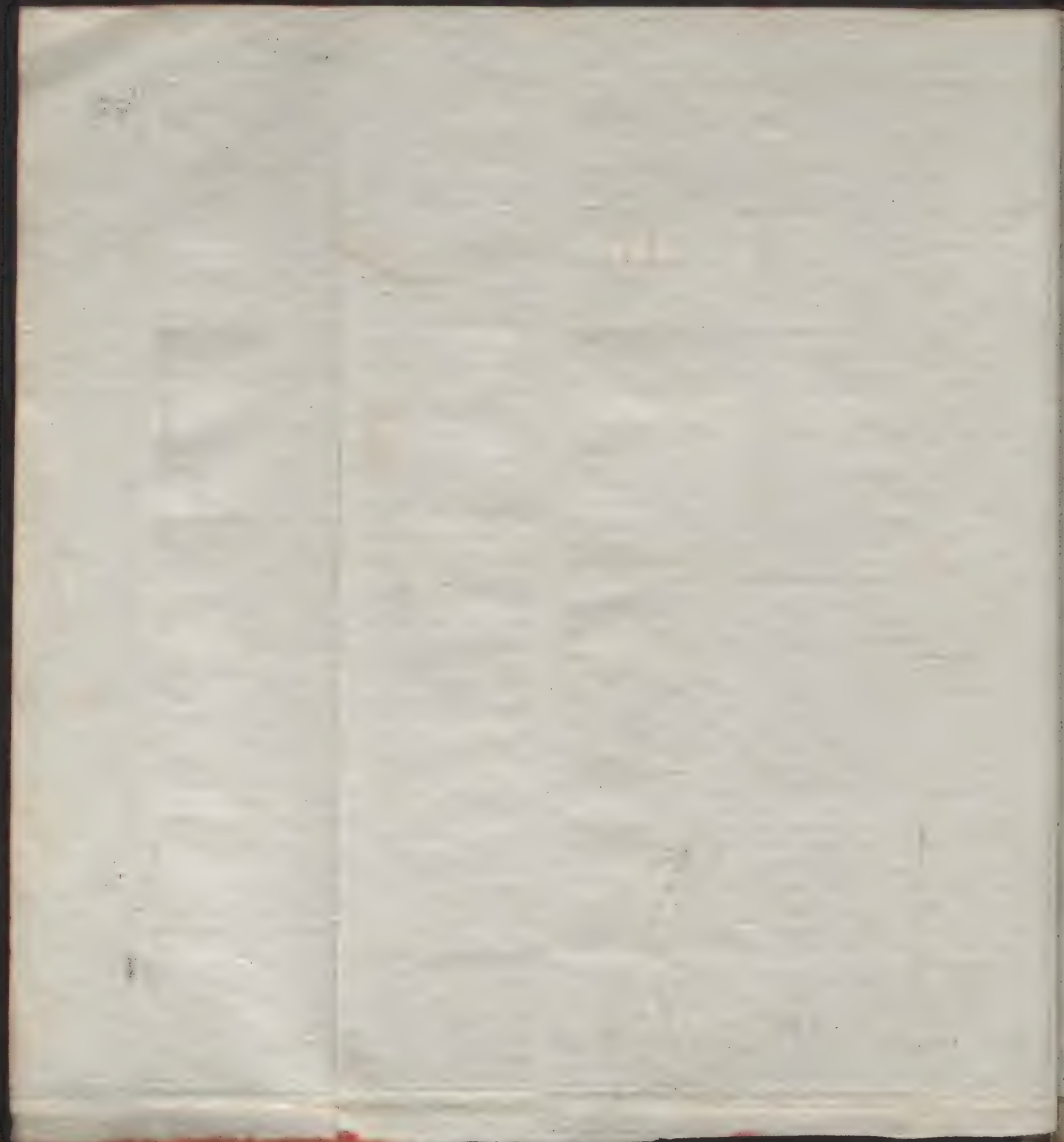


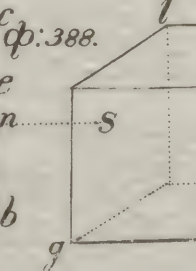
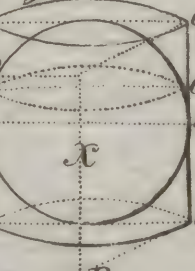
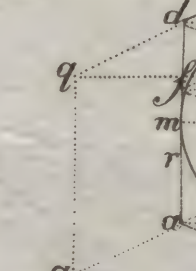
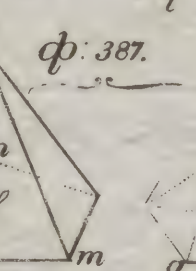
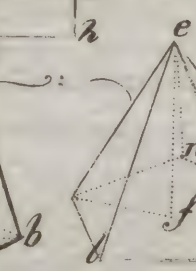
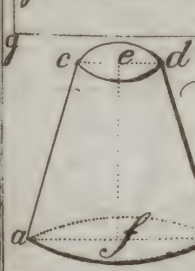
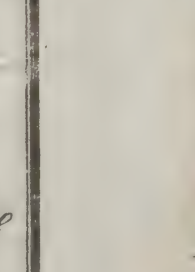
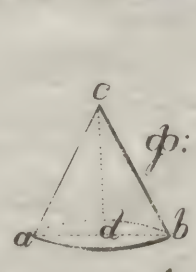
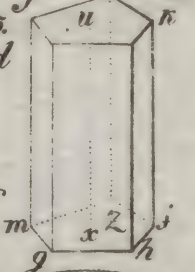
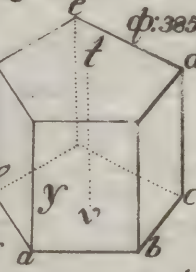
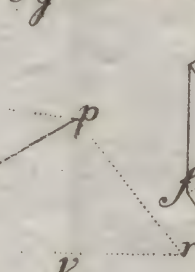
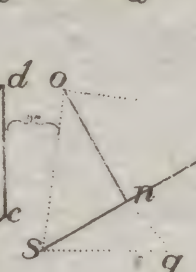
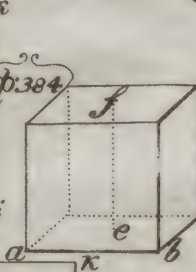
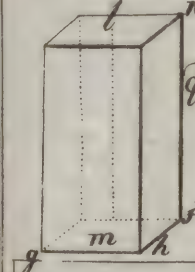
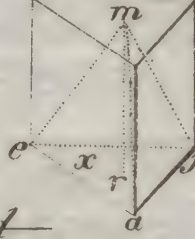
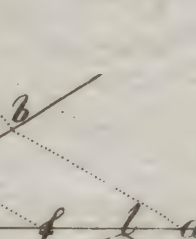
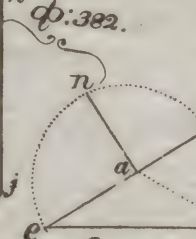
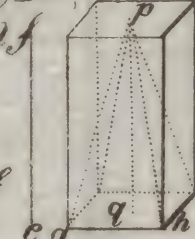
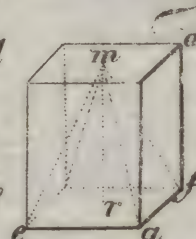
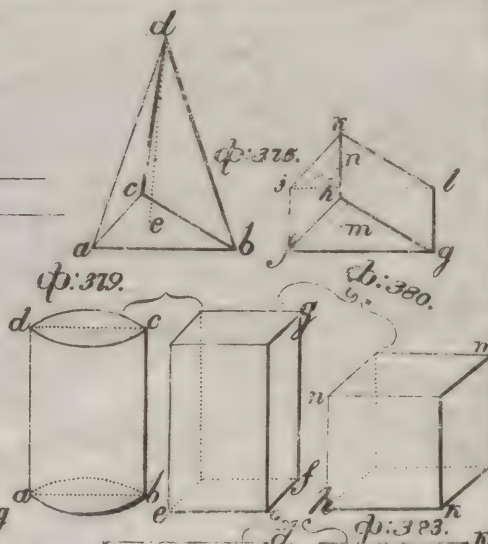
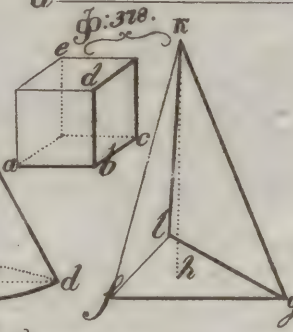
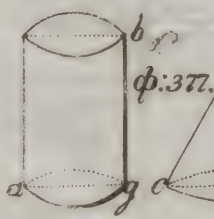
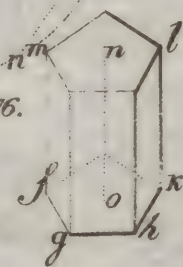
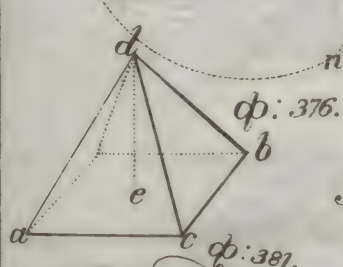
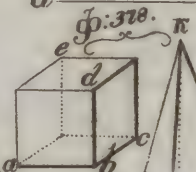
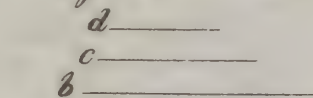
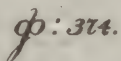
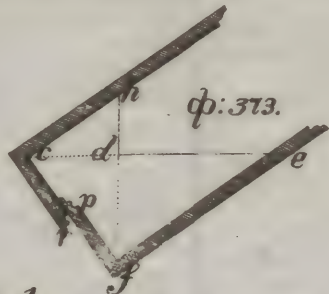
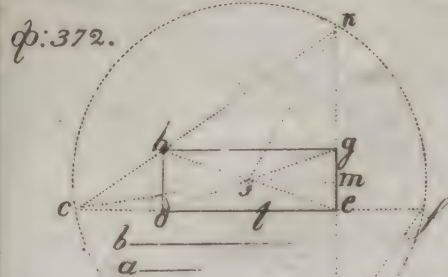
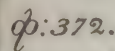


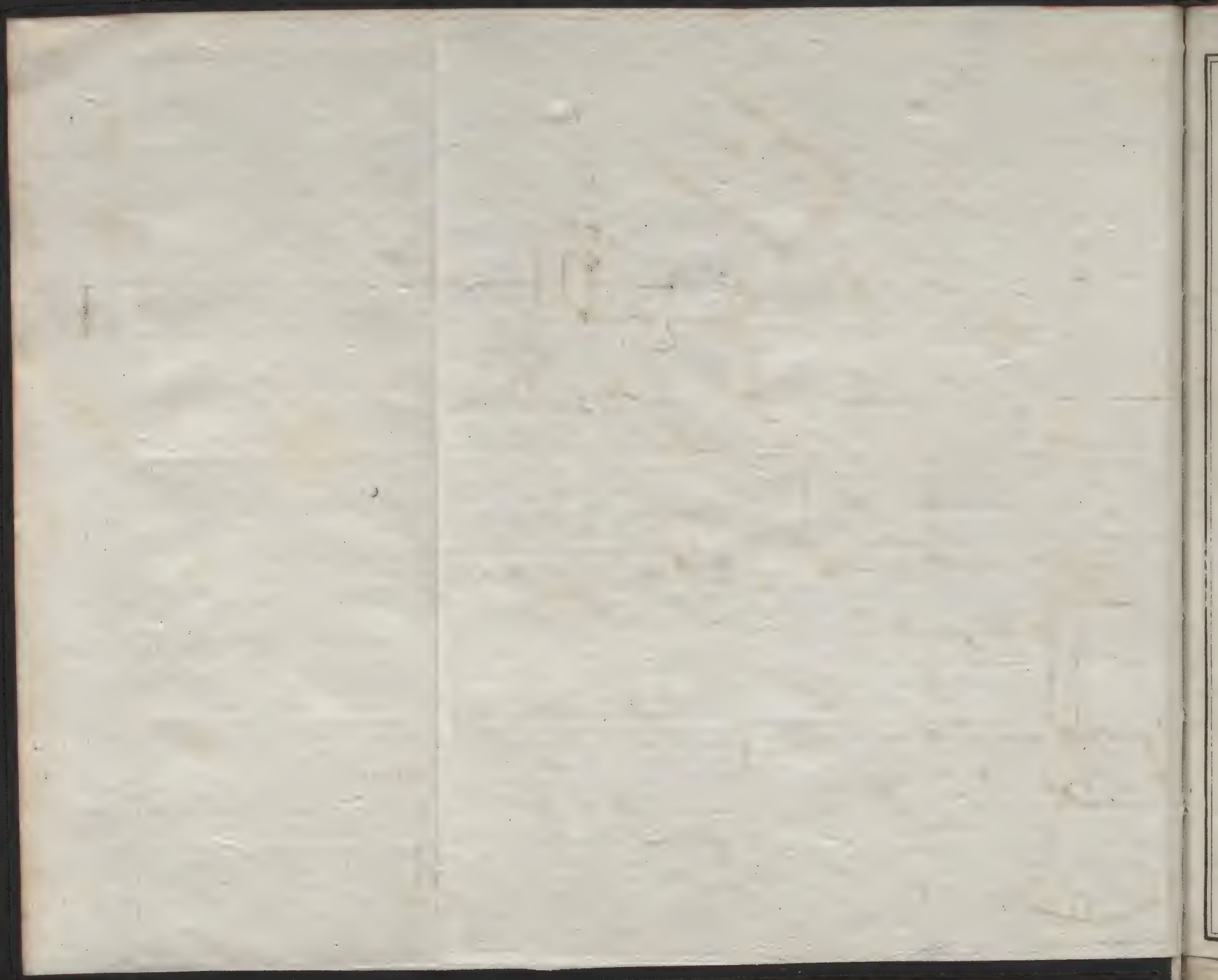


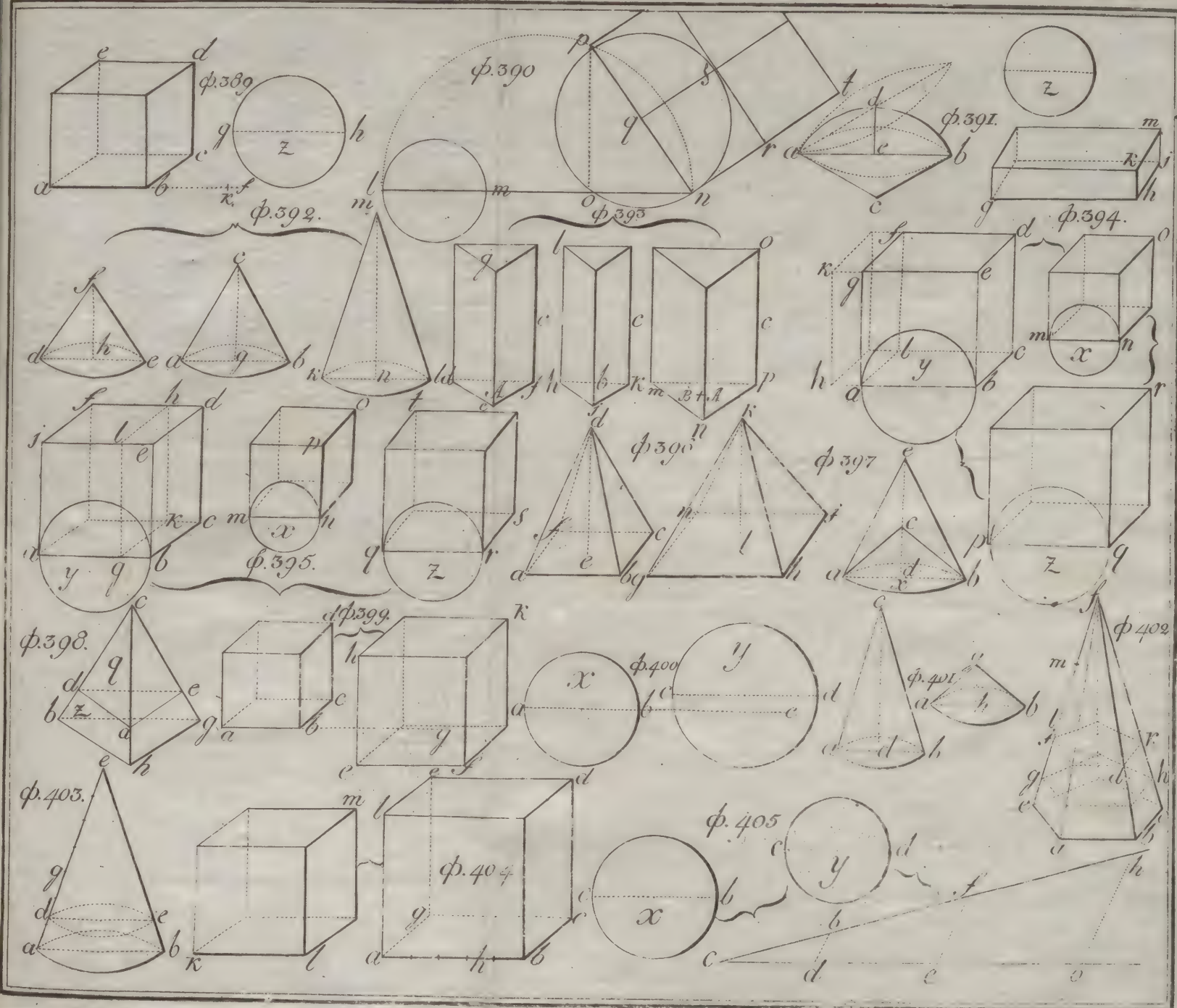


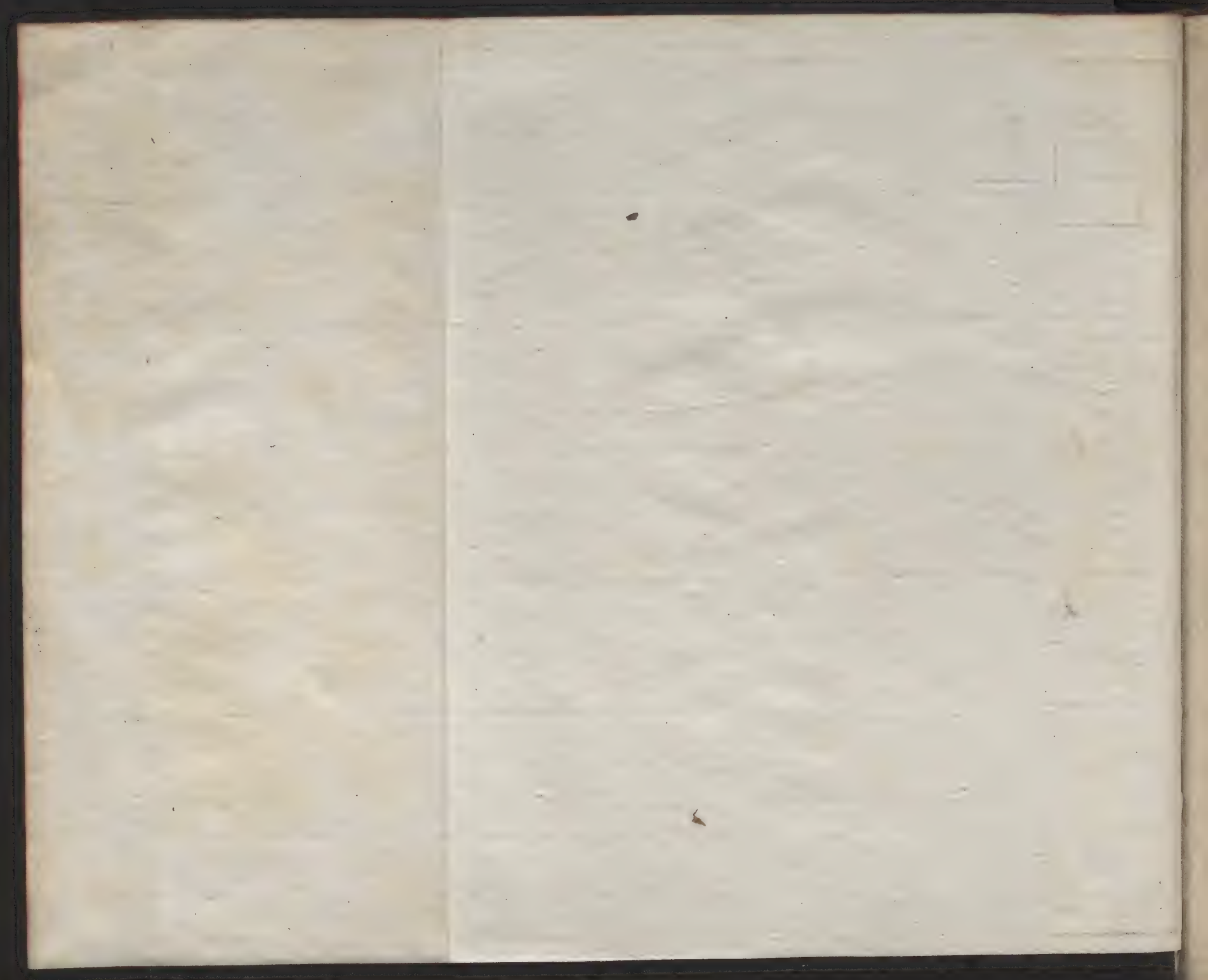












ms. 2794

Inches 1 2 3 4 5 6 7 8

Centimetres 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Colour Chart #13

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



DANES
PICTA
-SON



